

Институт физики микроструктур РАН - филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук"



На правах рукописи

Копасов Александр Андреевич

**Состояния квазичастиц и электронный транспорт в
сверхпроводящих гибридных структурах со
спин-орбитальным взаимодействием**

Специальность 1.3.8 —

«Физика конденсированного состояния»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Мельников Александр Сергеевич

Нижний Новгород — 2024

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Топологические переходы в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой	26
1.1 Модель	28
1.2 Спектральные свойства квазичастиц	31
1.3 Критерий появления краевых майорановских мод	35
1.4 Выводы	40
Глава 2. Особенности джозефсоновского транспорта через искривленные полупроводниковые нанопровода	41
2.1 Модель	41
2.2 Влияние спин расщепляющего поля в нанопроводе на основные характеристики джозефсоновского транспорта. Качественная картина	44
2.2.1 Поперечное зеэмановское поле	44
2.2.2 Текстурированное спин-расщепляющее поле	49
2.3 Результаты численного моделирования джозефсоновского транспорта	51
2.3.1 Поперечное зеэмановское поле	51
2.3.2 Текстурированное спин-расщепляющее поле	57
2.4 Выводы	58
Глава 3. Обратный эффект близости в гибридных структурах сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы	60
3.1 Модель	61
3.2 Линеаризованное уравнение самосогласования	63
3.3 Влияние спин расщепляющего поля и спин-орбитального взаимодействия в ферромагнетике на свойства сверхпроводящего слоя. Качественная картина	67
3.4 Результаты численного моделирования	70

	Стр.
3.5 Выводы	75
Заключение	76
Список публикаций автора по теме диссертации	78
Список литературы	80
Приложение А.	99
А.1 Вывод уравнения (1.1)	99
А.2 Вывод граничных условий для волновой функции квазичастиц в полупроводниковом коре на интерфейсе полупроводник/сверхпроводник	100
Приложение Б.	104
Б.1 Детали численного моделирования джозефсоновского транспорта	104
Приложение В.	106
В.1 Вывод нормальной функции Грина для бислоя сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы	106
В.2 Вывод линеаризованного уравнения самосогласования (3.8)	109

Введение

Явление сверхпроводимости, открытое Х. Каммерлинг-Оннесом в 1911 году [1], заключается в полном исчезновении электрического сопротивления постоянному току в некоторых металлах при температурах T ниже критической температуры сверхпроводящего фазового перехода T_c . Микроскопическая теория данного явления была построена Дж. Бардином, Л. Н. Купером и Дж. Р. Шриффером (БКШ) в 1957 году [2]. Независимое теоретическое описание сверхпроводящего состояния в рамках обобщенного канонического преобразования было дано Н. Н. Боголюбовым [3]. С точки зрения микроскопической теории, сверхпроводящий фазовый переход обусловлен неустойчивостью ферми-системы к образованию связанных состояний пар электронов (куперовских пар) при сколь угодно малом притяжении между ними [4]. Возникновение сверхпроводящего конденсата куперовских пар при $T < T_c$ сопровождается открытием сверхпроводящей щели $\Delta(T)$ в спектре квазичастичных возбуждений. Для достаточно широкого класса материалов эффективное притяжение между электронами обеспечивается за счет обмена виртуальными фононами, и существенными оказываются корреляции пар электронов с нулевым суммарным импульсом и спином (спин-синглетная сверхпроводимость). Пропускание постоянного тока I через сверхпроводник приводит к появлению суммарного импульса куперовской пары, однако, пока их скорость не превышает отношения сверхпроводящей щели Δ к импульсу Ферми p_F , сверхпроводящий ток является бездиссипативным [5]. Сверхпроводящее состояние также разрушается в достаточно сильных магнитных полях \mathbf{H} . К распаду куперовских пар приводит как орбитальный эффект магнитного поля [6], так и парамагнитный [7]. В последнем случае магнитное поле приводит к зеемановскому расщеплению спектра энергии квазичастиц, и когда расщепление уровней становится порядка сверхпроводящей щели, спин-синглетная сверхпроводимость разрушается. Другими словами, магнитное поле стремится сонаправить спины электронов, составляющие куперовскую пару, и при $|\mathbf{H}| > \sqrt{2}\Delta/g\mu_B$ (g - фактор Ландэ, μ_B - магнетон Бора) несверхпроводящее состояние оказывается энергетически более выгодным.

На данный момент существует достаточно обширная литература, посвященная изучению необычных сверхпроводящих корреляций, пространственная

и спиновая структура которых отлична от предсказаний теории БКШ (см., например, [8]). Возможная структура сверхпроводящего параметра порядка диктуется принципом запрета Паули, из которого следует, что волновая функция куперовской пары (аномальное среднее при совпадающих временах $F_{\sigma\sigma'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$) должна быть нечетной относительно перестановки двух фермионов¹. Здесь $\{\sigma, \sigma'\}$ - спиновые индексы, и $\mathbf{r}_{1,2}$ - координаты двух электронов. Данное условие обычно выражается в форме соотношения $F_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k}) = -F_{\sigma'\sigma}(-\mathbf{k})$, где $F_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$ - Фурье образ аномальной функции по разностной координате $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Значение функции $F_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$ пропорционально сверхпроводящему параметру порядка $\Delta_{\sigma\sigma'}(\mathbf{k})$, а ее зависимость от \mathbf{k} характеризует анизотропию щели в импульсном пространстве и определяется суперпозицией базисных функций неприводимого представления группы кристалла [8; 9]. В кристаллах с центром инверсии пространственно-четное (пространственно-нечетное) сверхпроводящее спаривание должно быть спин-синглетным (спин-триплетным). Известными примерами необычной сверхпроводимости являются сверхпроводящие состояния в высокотемпературных сверхпроводниках $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ и $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ с тетрагональной симметрией кристаллической решетки. В данных соединениях спин-синглетное спаривание $\hat{\Delta}(\mathbf{k}) = (i\hat{\sigma}_y)\Delta(\mathbf{k})$ описывается однокомпонентным параметром порядка $\Delta(\mathbf{k}) \propto k_x^2 - k_y^2$, преобразующимся в соответствии с представлением B_{1g} группы D_{4h} . Стоит отметить, что в материалах без центра инверсии в принципе могут реализовываться сверхпроводящие состояния, представляющие собой смесь спин-синглетного и спин-триплетного. Помимо симметричной классификации сверхпроводящего параметра порядка существует также более общая классификация возможных *сверхпроводящих корреляций*, которая основана на анализе симметрии аномального среднего при несовпадающих временах [10; 11] (см. также недавний обзор [12] и список цитированной литературы в нем). Исходя из определения, аномальное среднее является антисимметричной функцией относительно одновременной перестановки координат частиц, спиновых индексов и времен. На основе анализа симметрии аномальной корреляционной функции в представлении мацубаровских частот² $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$, где n - целое число, можно выделить два класса сверхпроводящих корреляций. Для сверхпроводящих корреляций, чет-

¹Приведенная ниже классификация сверхпроводящих конденсатов относится к однозонным сверхпроводникам. В многозонном случае под σ следует понимать совокупность спинового и зонного индекса.

²Или энергии при использовании формализма действительного времени.

ных по частоте, четная (нечетная) аномальная функция относительно $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ должна быть нечетной (четной) при перестановке спиновых индексов. Для нечетных по частоте сверхпроводящих корреляций классификация противоположная: симметричной (антисимметричной) пространственной части должна соответствовать симметричная (антисимметричная) спиновая.

Реализация необычных сверхпроводящих корреляций возможна в сверхпроводящих гибридных структурах с эффектом близости. Данный эффект состоит в проникновении сверхпроводящих корреляций из родительского сверхпроводника в несверхпроводящий материал при контакте этих материалов [13]. Пионерские теоретические работы по изучению сверхпроводящего эффекта близости принадлежат П. Ж. де Жену [14] и У. Л. Макмиллану [15]. Важно отметить, что эффект близости также может сопровождаться подавлением критической температуры и щели в самом сверхпроводнике (обратный эффект близости). Изменение пространственной и спиновой структуры куперовских пар в гибридных системах может иметь место, когда энергия квазичастиц в несверхпроводящем материале существенно зависит от спиновой степени свободы. Известным примером является генерация нечетных по частоте спин-триплетных сверхпроводящих корреляций в гибридных структурах сверхпроводник/ферромагнетик (S/F). Наличие спинового расщепления уровней энергии квазичастиц в ферромагнетике приводит к тому, что спин-синглетные куперовские пары в системе частично конвертируются в спин-триплетные пары (см., например, [11; 16–19]). Данная конверсия лежит в основе работы сверхпроводящих спиновых вентилях. Пионерские теоретические работы в этой области были сделаны в группах Л. Р. Тагирова, А. И. Буздина и М. Р. Бисли, которые показали что относительная ориентация намагниченностей $\mathbf{M}_{1,2}$ структурах S/F₁/F₂ или F₁/S/F₂, может оказать существенное влияние на критическую температуру сверхпроводящего перехода [20–22]. Сравнительно недавние достижения в физике эффекта спинового вентиля включают в себя реализацию полного переключения из сверхпроводящего состояния в нормальное и обратно слабым внешнем магнитным полем [23], триплетный и инверсный спин-вентильный эффекты [24–28]. Другим классом гибридных систем, в которых возможны необычные сверхпроводящие корреляции являются системы со спин-орбитальным взаимодействием. Спин-орбитальное взаимодействие является релятивистским эффектом и представляет собой связь орбитальных степеней свободы частицы с ее спином $\hat{H}_{so} \propto \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\nabla V \times \mathbf{p})$. Здесь $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ - вектор матриц Паули

в спиновом пространстве, $V(\mathbf{r})$ - потенциал решетки, и \mathbf{p} - импульс частицы. Возможность реализации спин-орбитального взаимодействия в твердотельных системах связана с симметрией системы относительно пространственной инверсии $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ [29]. Так, в материалах с центром инверсии спин-орбитальное взаимодействие может быть описано только в рамках многозонных моделей. С другой стороны, в материалах без центра инверсии спин-орбитальное взаимодействие может быть описано и в однозонном приближении. В нецентросимметричных материалах разделяют объемную асимметрию BIA (bulk inversion asymmetry) и структурную асимметрию SIA (structure inversion asymmetry). В первом случае спиновое расщепление энергетического спектра обусловлено пространственной структурой кристаллического поля в самом материале, а во втором - асимметрией потенциала конфайнмента. Для обоих случаев гамильтониан спин-орбитальной связи представим в виде [30]

$$\hat{H}_{so}(\mathbf{k}) = \hat{\sigma}\Omega(\mathbf{k}) ,$$

где $\Omega(\mathbf{k})$ - спин-орбитальное поле, удовлетворяющее симметричному соотношению $\Omega(\mathbf{k}) = -\Omega(-\mathbf{k})$. Проявления спин-орбитального взаимодействия активно изучаются в полупроводниковых материалах. Известный пример BIA - это спин-орбитальное взаимодействие Дрессельхауза, имеющее место для нецентросимметричной кристаллической структуры типа цинковой обманки [31]. Например, для квантовой ямы GaAs, выращенной в направлении $z \parallel [001]$ линейный по \mathbf{k} вклад Дрессельхауза описывается полем $\Omega_D(\mathbf{k}) = \beta\hbar(k_x, -k_y, 0)$. В квантовых ямах с асимметричным потенциалом конфайнмента имеется вклад Бычкова - Рашбы (или просто Рашбы) $\Omega_R(\mathbf{k}) = \alpha\hbar(\mathbf{n} \times \mathbf{k})$ [32]. В приведенных выше выражениях α, β - константы спин-орбитального взаимодействия, и \mathbf{n} - вектор нормали. Типичная двумерная зонная структура с учетом спин-орбитального взаимодействия и соответствующая ориентация спинов на Ферми поверхности показаны на Рис. 1.

В последнее время существенно возрос интерес к физике сверхпроводящих гибридных структур со спин-орбитальным взаимодействием. Такие системы предлагают принципиально новые возможности для управления сверхпроводящим транспортом, а также являются перспективной платформой для реализации топологической сверхпроводимости. Топологическими сверхпроводниками называются материалы со сверхпроводящей щелью в объеме и

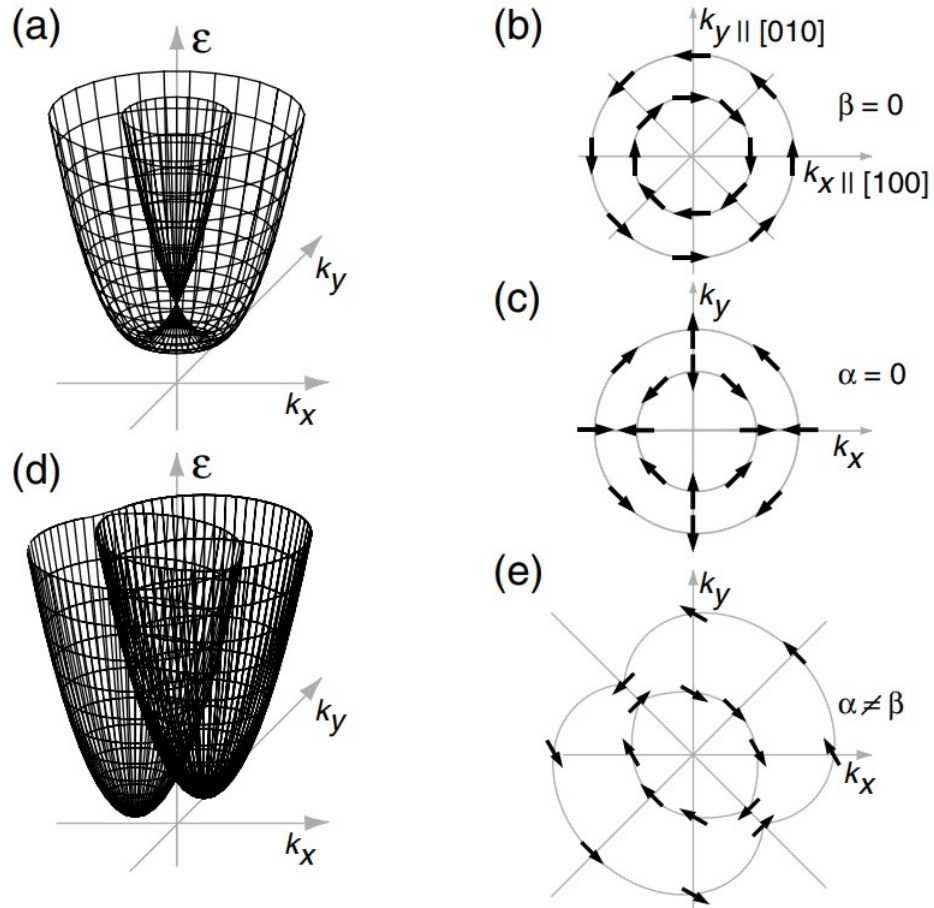


Рисунок 1 — (a) Схематичное изображение двумерной зонной структуры с учетом спин-орбитального взаимодействия Рашбы ($\alpha \neq 0$, $\beta = 0$) или Дрессельхауза ($\alpha = 0$, $\beta \neq 0$). (d) Зонная структура с учетом обоих вкладов $\alpha \neq \beta$. На панелях (b), (c) и (e) изображены соответствующие Ферми поверхности, стрелками показана ориентация спинов. Изображения взяты из статьи [33].

экзотическими краевыми модами майорановского типа. Перед кратким описанием свойств этих состояний, отметим, что майорановские моды были предсказаны и активно изучались для киральных p -волновых сверхпроводников [34–38]. Однако, на данный момент нет достоверных свидетельств реализации такого типа сверхпроводимости в том или ином соединении (известным кандидатом на роль кирального p -волнового сверхпроводника является Sr_2RuO_4 [39; 40]). Активный поиск майорановских мод в сверхпроводящих гибридных структурах стимулировала в том числе работа А. Ю. Китаева [41], в которой было продемонстрировано возникновение краевых состояний в цепочке бесспиновых фермионов с p -типом спаривания. Основной особенностью майорановских мод является то, что их волновые функции существенно локализованы вблизи краев цепочки, а суперпозиция двух майорановских мод представляет

собой незаряженное квазичастичное возбуждение фермионного типа с нелокальной волновой функцией. Данное нелокальное возбуждение отделено щелью от состояний континуума, и для достаточно длинной цепочки энергия данного состояния относительно уровня Ферми экспоненциально мала $E \propto e^{-2L/\xi}$. Здесь L - длина цепочки, и ξ - эффективная корреляционная длина. В литературе утверждается, что в силу указанных выше свойств, майорановские моды могут быть использованы для реализации топологически защищенных квантовых вычислений [41—48].

Существует три основных ингредиента для реализации спин-триплетной p -волновой сверхпроводимости в сверхпроводящих гибридных структурах с s -волновыми сверхпроводниками. Для реализации эффективно бесспинового спаривания необходимо добиться полной спиновой поляризации в несверхпроводящем материале. Для электронных систем с большим g -фактором такая ситуация может иметь место в достаточно сильном внешнем магнитном поле. С другой стороны, спиновое расщепление может быть наведено в несверхпроводящем материале при помещении его в контакт, например, с ферромагнитным изолятором. Вторым ингредиентом является спин-синглетные s -волновые сверхпроводящие корреляции в родительском сверхпроводнике. В условиях полной спиновой поляризации в несверхпроводящем материале спин-синглетные сверхпроводящие корреляции в него проникнуть не могут, поскольку для электронов, составляющих спиновое большинство, отсутствует партнер с противоположной проекцией спина для образования спин-синглетной пары. Проникновение сверхпроводящих корреляций оказывается возможным при наличии достаточно сильного спин-орбитального взаимодействия, которое может привести к появлению спин-триплетных корреляций p -типа. В силу перечисленных выше особенностей очень большое число рассматриваемых платформ для поиска майорановских мод являются гибридными структурами типа сверхпроводник/полупроводник [49—54]. Так, например, известными платформами для поиска майорановских мод являются двумерные и трехмерные топологические изоляторы с наведенной сверхпроводимостью [49—52].

Одной из перспективных платформ для реализации майорановских мод являются полупроводниковые нанопровода с наведенной сверхпроводимостью. Данная платформа была предложена независимо двумя теоретическими группами [55; 56], которые продемонстрировали возникновение спин-триплетной сверхпроводимости p -типа и майорановских мод для одномерного нанопровода.

Более подробный теоретический анализ данных систем, включая обобщение результатов на случай многомодовых проводов, представлен в статьях [57; 58]. Влияние эффектов сильного кулоновского отталкивания на топологическую фазовую диаграмму данных систем и возможность реализации майорановских мод проанализировано в работах [59–61]. Простейшая теоретическая модель, в рамках которой удастся описать изменение топологии и возникновение майорановских мод, представляет собой модель одномерного проводника со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода. Сверхпроводящий эффект близости, возникающий за счет контакта со сверхпроводником, моделируется при помощи феноменологического параметра щели Δ , включенного в гамильтониан системы. Майорановские моды в такой системе возникают при $h > \sqrt{\mu^2 + |\Delta|^2}$, где $h = g\mu_B H/2$ - зеемановская энергия, H - внешнее магнитное поле, и μ - химпотенциал нанопровода. При достаточно сильном зеемановском расщеплении в топологически нетривиальной фазе эффективная функция щели имеет вид $\Delta_{\text{eff}} \approx \alpha p |\Delta|/h$, где p - импульс квазичастиц вдоль провода. Было предсказано, что появление краевых майорановских мод должно приводить к особенностям туннельного транспорта через край нанопровода, а именно к возникновению пика дифференциальной проводимости на нулевом напряжении [62; 63]. Данная особенность была, по-видимому, впервые наблюдаена в нанопровode InSb, частично покрытом сверхпроводником NbTiN [64]. Похожие особенности были вскоре обнаружены и в других системах [65–71]. Схематичное изображение экспериментальной схемы по измерению туннельного транспорта, а также поведение дифференциальной проводимости показаны на Рис. 2. Отметим, что большинство экспериментально исследуемых структур представляют собой нанопровода InSb или InAs, частично покрытые тонким слоем низкотемпературного сверхпроводника Al, Nb или NbTiN. Стоит также отметить, что появление пика дифференциальной проводимости при нулевом напряжении, наблюдаемое в ряде экспериментов, не является характерной особенностью только майорановских мод. Тривиальные пики (не связанные с майорановскими состояниями) также могут возникать по ряду причин, например, из-за эффектов сильного беспорядка [72]. Данное обстоятельство, несомненно, осложняет однозначную интерпретацию имеющихся экспериментальных данных по туннельному транспорту в пользу реализации майорановских мод и стимулирует более детальные исследования гибридных структур полупроводник/сверхпроводник.

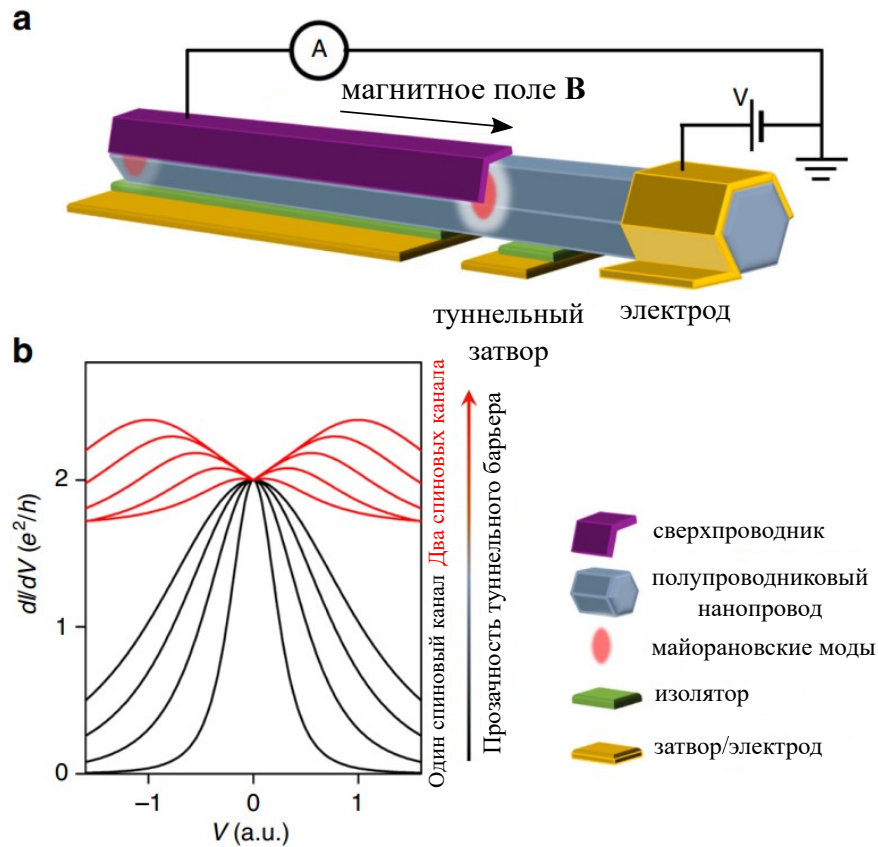


Рисунок 2 — (а) Схематичная экспериментальная схема по измерению туннельного транспорта через край полупроводникового нанопровода, покрытого сверхпроводником. (б) Зависимости дифференциальной проводимости dI/dV от напряжения V при изменении прозрачности туннельной границы, которая контролируется напряжением на туннельном затворе. Здесь e - заряд электрона, и h - постоянная Планка. Изображения взяты и адаптированы из статьи [73].

Одним из главных недостатков текущего поколения майорановских нанопроводов на основе систем InAs/Al является достаточно сильное внешнее магнитное поле для перехода в топологически нетривиальную фазу ($H \sim 1$ Т), которое, вообще говоря, сравнимо с критическим магнитным полем разрушения сверхпроводимости в оболочке. Недавние теоретические и экспериментальные работы посвящены снятию данного ограничения. В 2018 году появилось теоретическое предложение поиска майорановских мод в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой [74]. Соответствующая статья, содержащая как теоретическое предложение, так и эксперимент, выполненный в группе Ч. Маркуса, была опубликована в 2020 году [75]. Данные эксперименты возродили интерес к физике вихревых состояний в сверхпроводящих мезоскопических гибридных структурах в контексте их возможного использования для реализации топологически защищенных кван-

товых вычислений [41–48]. На качественном уровне основная идея данного предложения состоит в использовании достаточно сильного орбитального эффекта магнитного поля вместо слабого парамагнитного. Было предсказано, что входящие в оболочку вихри (возникновение нетривиального набега фазы параметра порядка при обходе вокруг сверхпроводящего цилиндра) могут перевести систему в топологически нетривиальную фазу даже в сравнительно слабых магнитных полях $H \sim 0.1$ Т, направленных вдоль оси нанопровода. Ключевым ингредиентом для реализации данного предложения является наличие пересечений спектральных ветвей квазичастиц $E_i(k_z)$ уровня Ферми аналогично инверсии зон в топологических изоляторах [76; 77] и ^3He [78; 79] (здесь индекс i нумерует спин-зависимые поперечные моды, и k_z - импульс квазичастиц вдоль оси провода). В свою очередь, минищель в спектре энергии квазичастиц появляется за счет спин-орбитального взаимодействия, вызванного радиальными электрическими полями в нанопроводе. Очевидно, что пересечения спектральных ветвей уровня Ферми должны отсутствовать в пределе очень сильного сверхпроводящего эффекта близости, когда электроны, налетающие на границу полупроводник/сверхпроводник (ПП/СП) практически полностью конвертируются в дырки из-за явления андреевского отражения [80] [см. Рис. 1.1(a)]. Действительно, как и в случае вихревого кора в s-волновом сверхпроводнике наличие доминирующего андреевского отражения для квазичастиц должно привести к формированию так называемой минищели Кароли- де Жена - Матрикона [81; 82] в спектре возбуждений даже без учета спин-орбитального взаимодействия $\omega_0 = |\Delta|/k_{\perp}^c R_c$. Здесь $|\Delta|$ - щель в спектре сверхпроводника, $k_{\perp}^c = \sqrt{(k_F^c)^2 - k_z^2}$, k_F^c - импульс Ферми в коре, и R_c - радиус полупроводниковой сердцевинки.

Важно отметить, что приведенные выше рассуждения не учитывают важных отличий между состояниями квазичастиц в коре вихря объемного сверхпроводника и в мезоскопическом гибридном нанопроводе: естественно ожидать, что в последнем случае спектр подщелевых квазичастиц будет определяться не только андреевским отражением от сверхпроводящей оболочки. Кроме процессов электрон-дырочной конверсии, в гибридных структурах сверхпроводник/полупроводник необходимо также учитывать нормальное отражение квазичастиц, вызванное несколькими факторами, среди которых можно выделить (i) скачок эффективной массы для электронов в полупроводниковой сердцевине m^* и в оболочке m_s , (ii) скачок потенциала, а также (iii) нормальное

отражение для квазичастиц от внешней границы сверхпроводящей оболочки. Работы [A1; A2] соискателя посвящены исследованию состояний квазичастиц в полностью покрытых полупроводниковых нанопроводах и установлению критерия появления майорановских мод в таких системах³. В данных работах было показано, что конкуренция нормального и андреевского отражения в таких структурах может привести к появлению квазичастичных состояний волноводного типа, распространяющихся вдоль гибридного нанопровода с существенной групповой скоростью (см., например, Рис. 1.1(b)). Продемонстрировано, что низкоэнергетический спектр квазичастиц а также поведение щели в спектре возбуждений нанопровода при изменении магнитного потока достаточно сильно зависят от области локализации волновой функции квазичастиц внутри полупроводникового кора. Показано, что наличие аккумуляционного слоя для электронов вблизи границы полупроводник/сверхпроводник может приводить к переоткрытию щели при увеличении магнитного потока в пределах состояния с фиксированной завихренностью сверхпроводящего параметра порядка. Такое поведение щели, в свою очередь, может приводить к особенностям эффекта четности в зарядовом транспорте через нанопровод в режиме кулоновской блокады, а именно к переключениям периодичности тока с $2e$ на e при входе вихря и последующим плавным восстановлением к $2e$ при дальнейшем увеличении магнитного потока в пределах заданного вихревого состояния. В работе [A1] также были исследованы эффекты спин-орбитального взаимодействия Рашбы с радиальным вектором нормали, установлен критерий появления майорановских мод в системе и определен их пространственный масштаб. С помощью расчета топологического инварианта установлено, что майорановские моды в системе возникают, когда спектр квазичастиц при $k_z = 0$ (без учета спин-орбитального взаимодействия) становится инвертированным $\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\mu=-1/2} - \mathcal{E}_{\mu=1/2} > 0$. Показано, что возникновение майорановских состояний может сопровождаться появлением распространяющихся мод. В контексте полученных результатов стоит также упомянуть вышедшую несколько позже теоретическую работу группы Э. Прады [83], авторы которой получили тот же критерий топологических переходов в полностью покрытых полупроводниковых нанопроводах. В отличие от [A1] для установления критерия возникновения майорановских

³Основные результаты [A1] детально изложены в главе 1 данной диссертации. В статье [A2] изучается влияние аккумуляционного слоя на подщелевой спектр квазичастиц без учета спин-орбитального взаимодействия.

мод в системе авторы [83] использовали прямой расчет плотности состояний на краю полубесконечного гибридного нанопровода.

Эффекты спин-орбитального взаимодействия в сверхпроводящих гибридных структурах вызывают интерес также в контексте их использования для расширения функциональных возможностей устройств так называемой сверхпроводящей спинтроники (от англ. Spintronics – SPIN TRansport electrONICS) [17–19; 84]. Целью спинтроники является создание цепей, в которых логические операции управляются спиновыми токами. Детектирование спиновых токов требует конверсии спинового тока в зарядовый, что в несверхпроводящих системах связано с диссипативными потерями. Использование сверхпроводящих гибридных структур позволяет обойти проблемы нагрева за счет того, что бездиссипативный зарядовый транспорт спин-триплетных куперовских пар может также обеспечивать транспорт спина. Помимо вопросов, касающихся влияния спин-орбитального взаимодействия на процессы конверсии спин-синглетных пар в спин-триплетные, большое внимание в литературе уделяется эффектам спин-орбитального взаимодействия в сверхпроводящем транспорте. В частности, одним из активно изучаемых эффектов, возникающем в гибридных структурах со спин-орбитальным взаимодействием, является так называемый аномальный эффект Джозефсона [85; 86]. Данный эффект характеризуется возникновением отличной от 0 или π разности фаз сверхпроводящего параметра порядка в берегах контакта в основном состоянии. Такие контакты получили название φ_0 - контакты (или фазовые батарейки), и вблизи критической температуры сверхпроводящего перехода ток-фазовое соотношение такого контакта имеет вид $I(\varphi) = I_c \sin(\varphi + \varphi_0)$, где I_c - критический ток, и φ - сверхпроводящая разность фаз. Отметим, что приведенное выше ток-фазовое соотношение возможно только в системах с нарушенной симметрией обращения времени и инверсии. Одна из первых теоретических работ по изучению φ_0 - переходов в системах со спин-орбитальным взаимодействием принадлежит А. И. Буздину [87], который показал, что в джозефсоновском транспорте через слабую связь, представляющую собой магнитный металл со спин-орбитальным взаимодействием (см. Рис. 3), возникающая на контакте спонтанная разность фаз $\varphi_0 \propto \alpha h 2L$, где α - константа спин-орбитального взаимодействия, h величина обменного поля в несверхпроводящем металле, и $2L$ - длина контакта. Физический механизм, приводящий к такому поведению ток-фазового соотношения может быть пояснен следующим образом. Для того, чтобы ском-

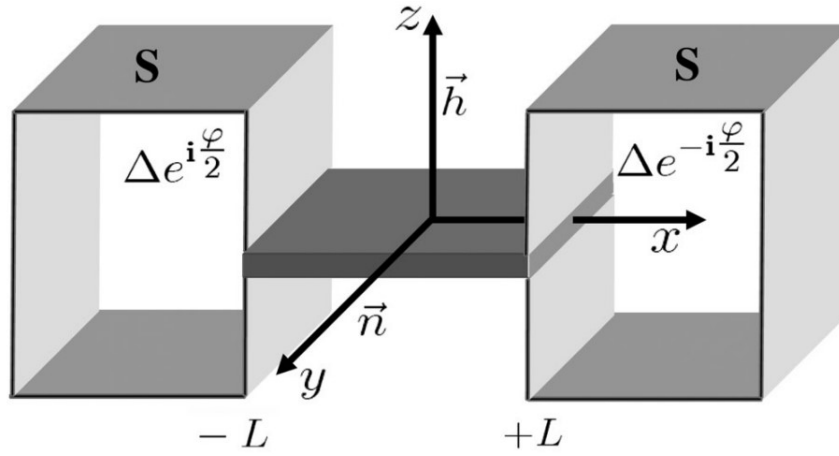


Рисунок 3 — Схематичное изображение джозефсоновского контакта со слабой связью, представляющей собой нецентросимметричный магнитный металл. Обменное поле \mathbf{h} направлено вдоль оси z , а вектор рашбовской нормали \mathbf{n} - вдоль оси y . Изображение взято из работы [87].

пенсировать спонтанный ток, вызванный спин-орбитальным взаимодействием, в системе развивается градиент сверхпроводящей фазы в направлении, задаваемом векторным произведением $(\mathbf{n}_h \times \mathbf{n})$, где \mathbf{n}_h - направление обменного поля, и \mathbf{n} - вектор нормали в спин-орбитальном взаимодействии Рашбы. Джозефсоновские φ_0 переходы демонстрируют ряд уникальных свойств, в частности, управление внутренним магнитным моментом с использованием джозефсоновского тока [88–90]. Аномальный эффект Джозефсона возникает в целом ряде систем, включающих в себя топологические изоляторы [91–93], джозефсоновские контакты со слабой связью из двумерного электронного газа [94; 95], нецентросимметричных магнитных металлов [87; 96], квантовых точек [97–99] или нанопроводов с сильным спин-орбитальным взаимодействием [100–104].

Отдельно стоит упомянуть, что транспортные характеристики сверхпроводящих гибридных структур с нарушенной симметрией обращения времени и симметрии инверсии могут быть анизотропными. Другими словами, в таких системах может иметь место так называемый сверхпроводящий диодный эффект. Данный эффект активно исследовался в контексте движения вихрей в системах с асимметричным потенциалом пиннинга или барьерами для входа вихрей, а также в системах с неоднородным распределением магнитного поля [105–110]. В последнее время наблюдается рост интереса к сверхпроводящему диодному эффекту. Детальное изучение механизмов невзаимного транспорта, не связанных с движением вихрей, было стимулировано в том числе недавней экспериментальной работой [111], в которой была обнаруже-

на анизотропия критического тока в искусственных сверхрешетках Nb/Va/Ta во внешнем магнитном поле, направленном вдоль плоскости слоев гибридной структуры. На данный момент сверхпроводящий диодный эффект активно изучается в различного рода системах, включающих в себя асимметричные сверхпроводящие квантовые интерферометры [112; 113] и материалы со спин-орбитальным взаимодействием [92; 100; 114–126]. Отметим, что в системах со спин-орбитальным взаимодействием помимо исследований анизотропии критического тока распаривания в объемных материалах [114–120], возможность реализации сверхпроводящего диодного эффекта была также предсказана для достаточно большого класса джозефсоновских переходов, который включает в себя джозефсоновские контакты через прямой многомодовый полупроводниковый нанопровод с сильным спин-орбитальным взаимодействием во внешнем магнитном поле [100].

Работа [A3] соискателя с соавторами посвящена изучению особенностей джозефсоновского транспорта через искривленные майорановские нанопровода. Данная работа мотивирована рядом теоретических работ [127; 128], предсказывающих возникновение спонтанной разности фаз в таких контактах, которая определяется геометрией системы и равна углу разориентации частей нанопровода χ (см., например, Рис. 2.1(a)). Причина данного эффекта состоит в переключении направления эффективного (зависящего от импульса квази-частиц) спин-орбитального поля в разных частях провода, которое, в свою очередь, приводит к появлению аномальной фазы. Однако, существующий анализ данного эффекта был выполнен для частного случая сильных спиновых расщеплений для электронов в нанопроводе, а расчет сверхтока включал в себя вклад только от подщелевых состояний квазичастиц, которые наиболее чувствительны к изменению топологии в системе. Такой подход, очевидно, не может быть использован для описания джозефсоновского транспорта в широком диапазоне зеемановских полей, соответствующих топологически тривиальной фазе и самой окрестности топологического перехода. Причина состоит в том, что для данного диапазона спиновых расщеплений модель Китаева, описывающая цепочку бесспиновых фермионов с наведенной сверхпроводимостью p -типа, не применима, и в расчетах джозефсоновского тока необходимо учитывать вклады от обеих спиновых подзон. Другим важным обстоятельством для анализа джозефсоновского транспорта через майорановские нанопроволки является то, что даже для контактов с размерами много меньше пространственного масшта-

ба сверхпроводящих корреляций необходимо учитывать вклады в сверхток как от подщелевых, так и от надщелевых состояний квазичастиц [103; 129—133]. В частности, в работе [129] было показано, что именно вклад надщелевых состояний дает конечное значение критического сверхтока при топологическом переходе, когда спектр нанопроволок является бесщелевым.

Анализ геометрических эффектов в джозефсоновском транспорте через полупроводниковые нанопровода с наведенной сверхпроводимостью представляет собой важную и актуальную задачу по ряду причин. Как уже было упомянуто ранее, на текущий момент в литературе большое внимание уделяется изучению туннельного транспорта края нанопровода [65—71]. Однако, возникновение особенности на $\partial I/\partial V$ при нулевом напряжении не является характерной особенностью только майорановских мод. В связи с этим, предложения новых экспериментальных конфигураций и тестов для обнаружения факта топологического перехода в полупроводниковых нанопроводах с наведенной сверхпроводимостью представляют значительный интерес. В качестве альтернативной системы изучаются проявления нетривиальной топологии в джозефсоновских контактах с полупроводниковым нанопроводом в области слабой связи [103; 129—139]. В частности, факт топологического перехода в системе, возникающего при увеличении спин-расщепляющего поля, проявляется в изменении наклона критического тока (см., например, работу [129]). С другой стороны, возможное применение майорановских нанопроводов для квантовых вычислений требует построения сетей нанопроводов достаточно сложных конфигураций [43; 46; 47]. Отметим, что в этом направлении уже был достигнут некоторый экспериментальный прогресс. В частности, несколько экспериментальных групп представили результаты по изготовлению решеток нанопроводов InSb/Al [140] а также нанокрестов из InAs [141].

В работе [A3] проведен детальный анализ поведения сверхпроводящей разности фаз в основном состоянии контакта при изменении спинового расщепления, переводящего искривленный нанопровод из топологически тривиальной в нетривиальную фазу. Отличительные особенности стационарного эффекта Джозефсона проанализированы для двух неэквивалентных ориентаций спин-расщепляющего поля в нанопроводе. Для первой конфигурации джозефсоновский контакт находится во внешнем магнитном поле, направленном перпендикулярно подложке, и спиновое расщепление в нанопроводе появляется из-за эффекта Зеемана. В работе также рассмотрена возможность

текстурированного спин-расщепляющего поля, направленного параллельно и антипараллельно оси провода в разных его частях. Рассмотрение данной конфигурации было мотивировано недавними экспериментами по гибридным ферромагнитным нанопроводам InAs/EuS/Al [142]. В таких структурах наведенное спиновое расщепление в нанопроводе имеет обменную природу. Проведенный в работе анализ поведения спонтанной сверхпроводящей разности фаз показывает, что эта разность фаз перестраивается спин-расщепляющим полем, и соответствующие джозефсоновские переходы являются перестраиваемыми фазовыми батарейками. Для обеих конфигураций спин-расщепляющего поля продемонстрирована возможность невзаимного сверхпроводящего транспорта (сверхпроводящего диодного эффекта) - зависимости критического сверхтока от направления пропускаемого тока. Интересно отметить, что согласно предыдущим теоретическим работам, для появления невзаимного сверхпроводящего транспорта в контактах через прямые полупроводниковые нанопровода многомодовость является существенной. Полученные в рамках данной работы результаты показывают, что особенности геометрии системы позволяют получить невзаимный сверхпроводящий транспорт даже для одномодового нанопровода, и именно геометрия определяет параметры невзаимного транспорта.

Примечательно, что достаточно широкий круг физических явлений в сверхпроводящих гибридных структурах со спин-орбитальным взаимодействием, включающий в себя возникновение спонтанной разности фаз в джозефсоновских переходах и спонтанных токов, могут быть описаны в рамках феноменологической теории типа Гинзбурга-Ландау (ГЛ) с линейным по градиенту сверхпроводящего параметра порядка вкладом $\sim (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h)(\nabla\Delta)\Delta^*$ в плотность свободной энергии (так называемый инвариант Лифшица) [87; 143–146]. Здесь $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, \mathbf{n} (\mathbf{n}_h) - единичный вектор вдоль оси с нарушенной симметрией инверсии (единичный вектор вдоль направления обменного поля), и Δ - сверхпроводящий параметр порядка. Несмотря на наличие вывода функционала Гинзбурга-Ландау для сверхпроводников со спин-орбитальным взаимодействием как в чистом, так и в грязном пределе [147–153], обоснование инварианта Лифшица в гибридных структурах представляет собой нерешенную задачу⁴. Решение данного вопроса напрямую связано с исследованием влияния

⁴Заметим, что сходная проблема также имеет место для сверхпроводящих гибридных структур, в которых примыкающий слой характеризуется текстурированным распределением намагниченности [154].

спин-орбитального взаимодействия на критическую температуру сверхпроводящего перехода и пространственную структуру волновой функции куперовских пар в сверхпроводящих гибридных структурах типа сверхпроводник/ферромагнетик. Известно, что сильная спиновая поляризация для квазичастиц в примыкающем к сверхпроводнику слое может привести к подавлению родительской сверхпроводимости даже в том случае, если примыкающий слой является изолятором [155–159]. Первое теоретическое описание особенностей обратного эффекта близости в планарных гибридных структурах сверхпроводник/ферромагнитный изолятор в чистом пределе было выполнено в работе [155]. Причина распаривающего эффекта для куперовских пар состоит в том, что волновые функции квазичастиц при отражении от спин-активной границы приобретают спин-зависимые фазы рассеяния (см. также [17–19]). Естественно ожидать, что спин-орбитальное взаимодействие должно привести к подавлению распаривающего эффекта обменного или зеемановского поля и к увеличению критической температуры сверхпроводящего перехода. Такое ожидание основано на результатах ряда теоретических работ, изучающих данный эффект в сверхпроводниках со спин-орбитальным взаимодействием (см., например, работы [160–162]). Работа [A4] соискателя посвящена исследованию обратного эффекта близости в гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. В данной работе показано, что спин-орбитальное взаимодействие приводит к частичной компенсации распаривающего эффекта обменного поля, а также стабилизирует неоднородное сверхпроводящее состояние с отличным от нуля импульсом куперовской пары. Построенное микроскопическое описание обратного эффекта представляет обосновывает появление инварианта Лифшица для феноменологического описания таких структур а также указывает на пределы применимости такого описания.

Целью данной работы является исследование состояний квазичастиц и электронного транспорта в сверхпроводящих гибридных структурах со спин-орбитальным взаимодействием.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- расчет спектра энергии квазичастиц в полупроводниковом нанопроводе, полностью покрытом сверхпроводящей оболочкой, во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода;

- установление критерия появления краевых майорановских мод в полностью покрытых полупроводниковых нанопроводах с сильным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы с радиальным вектором нормали во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода;
- расчет аномальной фазы и критического тока джозефсоновских контактов, содержащих одномодовый искривленный полупроводниковый нанопровод в области слабой связи, в зависимости от величины спин-расщепляющего поля в нанопроводе;
- исследование взаимного влияния обменного поля и спин-орбитального взаимодействия на критическую температуру сверхпроводящего перехода и пространственный профиль параметра порядка в гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы.

Научная новизна работы

Научная новизна работы определяется оригинальностью поставленных задач, полученными новыми результатами и заключается в следующем.

- Продемонстрирована возможность возвратного поведения щели в спектре возбуждений полупроводникового нанопровода, полностью покрытого сверхпроводящей оболочкой, в зависимости от величины внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси нанопровода. Установлен критерий появления краевых майорановских мод в таких структурах в присутствии текстурированного спин-орбитального взаимодействия Рашбы с радиальным вектором нормали, и определен их пространственный масштаб.
- Анализ характеристик сверхпроводящего транспорта в джозефсоновских контактах с искривленным полупроводниковым нанопроводом в области слабой связи проведен в *широком* диапазоне спинового расщепления в нанопроводе, покрывающем как топологически тривиальную, так и нетривиальную области фазовой диаграммы. При заданном значении угла разориентации частей нанопровода продемонстрирована возможность перестройки сверхпроводящей разности фаз в берегах контакта в основном состоянии спин-расщепляющим полем. Для *одномодового* искривленного нанопровода предсказан невзаимный

сверхпроводящий транспорт, а именно зависимость критического сверхтока от направления пропускаемого тока.

- В рамках *микроскопической* теории проведен расчет критической температуры и профиля сверхпроводящего параметра в гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие частично компенсирует распаривающий эффект обменного поля и стабилизирует неоднородное сверхпроводящее состояние с конечным импульсом куперовских пар в системе центра масс. Исследовано поведение импульса куперовских пар в зависимости от обменного поля и энергии спин-орбитального взаимодействия. В отличие от известных в литературе результатов, анализ обратного эффекта близости выполнен для гибридных структур с *конечной* толщиной слоев в *чистом* пределе.

Теоретическая и практическая значимость работы

С практической точки зрения, интерес представляет реализация майорановских состояний в сверхпроводящих гибридных структурах с сильным зеемановским (или обменным) полем и спин-орбитальным взаимодействием, а также транспортные свойства таких структур. Подчеркнем ключевые аспекты возможных приложений результатов диссертации.

- Результаты расчета спектров энергии квазичастиц в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, применимы для анализа транспортных характеристик таких структур. Сравнение теоретических предсказаний поведения щели в спектре возбуждений гибридного нанопровода при изменении внешнего магнитного поля с результатами экспериментов по измерению туннельного транспорта позволяет косвенно судить о пиннинге уровня Ферми в полупроводниковой сердцевине и пространственном распределении волновой функции квазичастиц в таких устройствах.
- Критерий топологических переходов в полностью покрытых полупроводниковых нанопроводах может быть использован для оптимизации параметров гибридных структур, в которых возможно появление краевых майорановских мод.

- Расчет сверхпроводящего транспорта в джозефсоновских контактах с искривленным полупроводниковым нанопроводом в области слабой связи демонстрирует возможность перестройки разности фаз сверхпроводящего параметра порядка в берегах контакта в основном состоянии спин-расщепляющим полем, а также возможность реализации невзаимного сверхпроводящего транспорта в таких системах.
- Расчет импульса куперовских пар в системе сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы, выполненный в рамках микроскопической теории, позволяет обосновать стандартный феноменологический подход для описания таких систем в рамках теории Гинзбурга-Ландау с инвариантом Лифшица, а также установить диапазон параметров гибридных структур, для которых такого рода упрощенное описание справедливо.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач были применены стандартные теоретические подходы, позволяющие адекватно описывать свойства сверхпроводящих гибридных структур:

- подход Боголюбова - де Жена для исследования состояний квазичастиц в сверхпроводящих гибридных структурах;
- численные методы нахождения собственных значений и собственных функций конечно-разностной аппроксимации гамильтониана системы;
- микроскопический подход, основанный на уравнениях Горькова, для исследования обратного эффекта близости в гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, конкуренция нормального и андреевского отражения может приводить к появлению майорановских состояний, а также мод квазичастиц волноводного типа. Возникновение майорановских мод возможно при нечетных значениях завихренности сверхпроводящего

- параметра порядка в оболочке в случае, когда спектр состояний с нулевым продольным импульсом и минимальной по модулю проекцией углового момента на ось нанопровода становится инвертированным.
2. Джозефсоновские переходы с искривленным полупроводниковым нанопроводом в области слабой связи могут иметь отличную от 0 или π спонтанную разность фаз сверхпроводящего параметра порядка в берегах контакта в основном состоянии, а также демонстрировать невзаимный сверхпроводящий транспорт. Величина спонтанной разности фаз и анизотропия критического тока определяются геометрией системы и величиной спин-расщепляющего поля в нанопроводе.
 3. В гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Rashba связь импульса квазичастиц со спином приводит к ослаблению распаривающего эффекта обменного поля и стабилизирует неоднородные сверхпроводящие состояния с конечным импульсом куперовских пар.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность результатов работы обеспечена выбором адекватных физических моделей, отражающих основные свойства исследуемых систем.

Основные результаты работы обсуждались на семинарах в ИФМ РАН. Материалы диссертационной работы были представлены на международных симпозиумах "Наноп физика и наноэлектроника" (Нижний Новгород, 2020, 2021); XXIII и XXIV "Уральской международной зимней школе по физике полупроводников" (Екатеринбург, 2020, 2022); XXXIX Международной зимней школе физиков-теоретиков "Коуровка" (Екатеринбург, 2022); II Международной конференции ФКС-2021, посвященной 90-летию со дня рождения академика Ю. А. Осипьяна (Черноголовка, 2021); XVIII и XIX Всероссийской конференции "Проблемы физики твердого тела и высоких давлений" (Сочи, 2019, 2020). Результаты диссертации опубликованы в 13 работах, из них 5 статей в рецензируемых журналах [A1—A5] и 8 работ в сборниках тезисов докладов и трудов конференций [A6—A13].

Личный вклад автора

Автор принимал активное участие в постановке и решении теоретических задач, в обсуждении полученных результатов и их интерпретации.

В работах [A1; A2] вклад автора является определяющим в части вывода граничных условий для волновой функции квазичастиц в полностью покрытых полупроводниковых нанопроводах на интерфейсе полупроводник/сверхпроводник и численного моделирования спектров энергии квазичастиц в таких системах. равнозначным (с А. С. Мельниковым) является вклад соискателя в решение вопроса об установлении критерия топологических переходов в таких структурах [A1].

Вклад автора в работе [A3] является определяющим в части численного моделирования сверхпроводящего транспорта в джозефсоновских контактах, содержащих искривленный полупроводниковый нанопровод в области слабой связи, и равнозначным с соавторами (А. Г. Кутлиным и А. С. Мельниковым) в части аналитических расчетов характеристик джозефсоновского транспорта в таких структурах.

В работе [A4] вклад автора является определяющим в части вывода и решения уравнения на критическую температуру сверхпроводящего перехода гибридных структур сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 113 страниц, включая 22 рисунка. Список литературы содержит 204 наименования.

Во введении описывается состояние исследований по теме диссертации на момент её написания, обосновывается актуальность выбранной темы, раскрывается новизна и значимость работы, приводятся выносимые на защиту положения и план диссертации. В первой главе изучаются состояния квазичастиц в гибридной структуре полупроводниковый нанопровод, полностью покрытый сверхпроводящей оболочкой, во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода. В рамках формализма уравнений Боголюбова – де Жена решается задача об электронной структуре n -квантового вихря, захваченного сверхпроводящей оболочкой, а также проводится анализ затухающих и распространяющихся мод в присутствии текстурированного спин-орбитального

взаимодействия Рашбы с радиальным вектором нормали. Во второй главе с помощью уравнений Боголюбова – де Жена изучаются основные характеристики джозефсоновского транспорта через искривленный полупроводниковый нанопровод с сильным спин-орбитальным взаимодействием в области слабой связи. В третьей главе исследуются условия зарождения сверхпроводимости в гибридных структурах, состоящих из тонкой сверхпроводящей пленки в контакте с материалом с сильным обменным или зеемановским полем и спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. В рамках теории Горькова решается задача о критической температуре сверхпроводящей пленки и пространственной структуре сверхпроводящего параметра порядка вблизи критической температуры. В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1. Топологические переходы в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой

В данной главе рассматривается вопрос о влиянии конкуренции нормального и андреевского отражения на возможность появления топологических переходов в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой (см. Рис. 1.1), во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода. Также проанализированы возникающие состояния квазичастиц. Качественное объяснение данного эффекта может быть дано на основе квазиклассической теории. Взаимодействие процессов нормального и андреевского отражения может быть описано в квазиклассическом приближении при $k_F^c \xi \gg 1$ в рамках подхода [163–165], развитого для вихря в мезоскопическом сверхпроводящем диске. Здесь $\hbar k_F^c$ - импульс Ферми в полупроводниковом ядре, и ξ - сверхпроводящая длина когерентности. Пренебрегая для простоты эффектом спин-орбитального взаимодействия, мы получаем следующее выражение, описывающее низкоэнергетический спектр квазичастиц в одноквантовом вихре (детали вывода даны в Приложении A.1):

$$E_{\uparrow,\downarrow}(\mu, k_z) = \mu(\omega_0 + \omega_H/2) \pm V_Z + \delta \cos[\theta(\mu, k_z)] \quad , \quad (1.1)$$

где второе $\omega_H = \hbar e H / m^* c$ и третье $V_Z = g \beta H / 2$ слагаемые появляются из-за орбитального эффекта и эффекта Зеемана, соответственно, а осциллирующий вклад с амплитудой $\delta = 2|\Delta| \mathcal{R}(k_z)$ и фазой $\theta = 2k_{\perp}^c R_c - \pi\mu - \pi/2$ появляется из-за процессов нормального отражения. Здесь μ - полуцелое число,

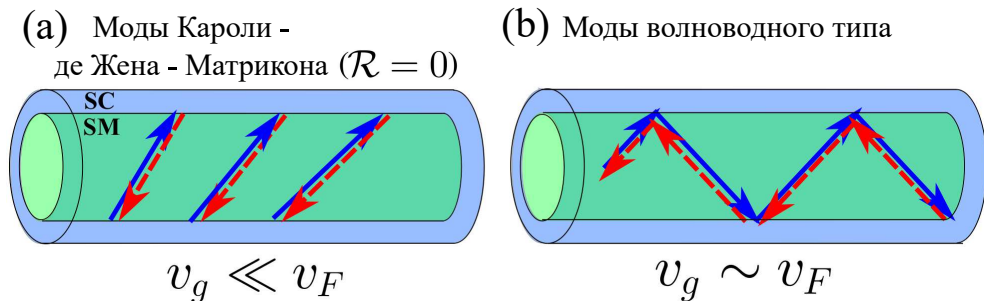


Рисунок 1.1 — Электронные (сплошные линии) и дырочные (штрихованные линии) траектории в полупроводниковой сердцевине для случаев доминирующего андреевского (а) и нормального (б) отражения от сверхпроводящей оболочки нанопровода.

$\omega_0 = |\Delta|/k_{\perp}^c R_c$, $|\Delta|$ - модуль сверхпроводящего параметра порядка в оболочке, $k_{\perp}^c = \sqrt{(k_F^c)^2 - k_z^2}$, $\hbar k_F^c$ - импульс Ферми в полупроводниковом коре, $\hbar k_z$ - продольный импульс квазичастиц (вдоль оси нанопровода), R_c - радиус полупроводниковой сердцевинки, \hbar - постоянная Планка, $e > 0$ - элементарный заряд, c - скорость света, g - эффективный фактор Ландэ для электронов в коре, β - магнетон Бора, $\mathcal{R}^2(k_z) \ll 1$ - вероятность нормального отражения от границы полупроводник/сверхпроводник (ПП/СП), и \uparrow (\downarrow) соответствует состоянию с положительной (отрицательной) проекцией спина на направление внешнего магнитного поля. Таким образом, изменяя баланс между андреевским и нормальным отражением \mathcal{R} , можно сильно повлиять на энергию состояний в подщелевом спектре квазичастичных возбуждений гибридной структуры и полностью закрыть минищель при $\delta \sim \omega_0$. Количество пересечений спектральных ветвей и уровня Ферми (число решений уравнения $E(\mu, k_z) = 0$) зависит от отношения $\delta/\omega_0 = 2\mathcal{R}k_{\perp}^c R_c$ и числа транспортных каналов в полупроводниковой сердцевине $\propto k_F^c R_c$ ¹. Дополнительная перестройка мод с нулевой энергией обеспечивается за счет орбитального эффекта магнитного поля или эффекта Зеемана. Каждое такое пересечение дает электрон-дырочное состояние на уровне Ферми, распространяющееся вдоль андреевского волновода с групповой скоростью v_g порядка скорости Ферми v_F^c в полупроводниковом коре. Таким образом, полностью покрытые полупроводниковые нанопровода представляют собой уникальную экспериментальную платформу для изучения кроссовера от состояний типа Кароли - де Жена - Матрикона с исчезающей групповой скоростью $v_g \ll v_F^c$ и андреевских мод волноводного типа (см. Рис. 1.1).

Текстурированное спин-орбитальное взаимодействие [75]

$$\hat{H}_{so} = \alpha \mathbf{e}_r \left[\hat{\sigma}, \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} \right) \right],$$

приводит к гибридизации квазичастичных состояний с проекциями углового момента на ось нанопровода μ и $\mu + 1$. Здесь α - константа спин-орбитального взаимодействия, $\hat{\sigma}$ - вектор матриц Паули в спиновом пространстве, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, \mathbf{A} - векторный потенциал, \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_{φ} - орты в цилиндрической системе координат. Будучи наиболее эффективной вблизи пересечений спектральных ветвей, данная гибридизация должна быть особенно важна для пересечений на уровне

¹Следует отметить, что число спектральных ветвей также зависит от завихренности сверхпроводящего параметра порядка в оболочке.

Ферми, приводящих к открытию минищелей в спектре для взаимодействующих спиновых состояний.

Главная цель данной работы - показать, что вышеупомянутые моды волнового типа обеспечивают инверсию энергетических ветвей, необходимую для образования топологически нетривиальных мод квазичастиц в андреевском волноводе. Каждая волноводная мода из этой серии должна давать майорановские моды квазичастиц, локализованные вблизи краев нанопровода. Решение данной задачи, в свою очередь, может позволить предложить способ оптимизации топологической защиты для майорановских состояний в многоканальных полупроводниковых нанопроводах даже для достаточно малых значений константы спин-орбитального взаимодействия в таких структурах [166].

1.1 Модель

Анализ спектральных свойств полупроводниковых нанопроводов, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, основан на уравнениях Боголюбова - де Жена (БдЖ) для гибридной структуры:

$$\check{\mathcal{H}}\Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}) , \quad (1.2a)$$

$$\check{\mathcal{H}} = \check{\tau}_z \left[\mathbf{P} \frac{1}{2m(\mathbf{r})} \mathbf{P} + U(\mathbf{r}) \right] + \check{\tau}_x \text{Re}\Delta(\mathbf{r}) - \check{\tau}_y \text{Im}\Delta(\mathbf{r}) , \quad (1.2b)$$

где $\mathbf{P} = (\mathbf{p} + \check{\tau}_z e\mathbf{A}/c)$, $m(\mathbf{r})$ - пространственный профиль эффективной массы, $U(\mathbf{r})$ потенциал конфайнмента, $\check{\tau}_i$ ($i = x, y, z$) - матрицы Паули в пространстве электрон-дырка. Сверхпроводящий параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ отличен от нуля только в оболочке. Для простоты мы рассматриваем нанопровод с круглым поперечным сечением [167] и используем цилиндрические координаты $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$. Пренебрегая пространственной неоднородностью параметра порядка в оболочке, мы используем упрощенную модель, описывающую зависимость сверхпроводящей щели от внешнего магнитного потока и учитывающую переключения между состояниями с различной завихренностью n^2

$$\Delta = \Delta_0 \left[1 - \gamma (\Phi/\Phi_0 - n)^2 \right] e^{-in\varphi} , \quad (1.3)$$

²Строго говоря, пространственный профиль функции щели $\Delta(\mathbf{r})$ должен быть получен из решения уравнения самосогласования в сверхпроводящей оболочке (см., например, работы [168–170]).

где Δ_0 - щель в спектре возбуждений оболочки в нулевом магнитном поле, $\Phi = \pi H R_c^2$, $\Phi_0 = \pi \hbar c / e$ - магнитный поток через нанопровод и квант магнитного потока, соответственно, $n(\Phi) = \lfloor 1/2 + \Phi/\Phi_0 \rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть x , и $\gamma \sim \xi^2/R_c^2$ для $d_s \ll R_c$. Влияние изгиба дна зоны проводимости в полупроводниковом коре учитывается с помощью модельных профилей потенциала конфайнмента в коре, включающих в себя (i) плоский профиль потенциала $U(r) = U_0$ и (ii) параболический профиль³

$$U(r) = U_0 - (U_0 + E_F^s m^* / m_s \eta^2) (r/R_c)^2, \quad (1.4)$$

описывающий наличие обедненного слоя вблизи центра кора (когда уровень Ферми располагается ниже дна зоны проводимости). Здесь E_F^s - энергия Ферми в металлической оболочке, m^* (m_s) - эффективная масса для электронов в полупроводниковом коре (сверхпроводящей оболочке), и η - отношение скоростей Ферми в металле и полупроводнике при $r = R_c$. Аксиальная симметрия задачи при выборе радиальной калибровки векторного потенциала $A_\varphi = Hr/2$, $A_r = A_z = 0$ позволяет искать решения (1.2) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ik_z z + i\mu\varphi - i\tilde{\tau}_z n\varphi/2} \Psi_{\mu, k_z}(r), \quad (1.5)$$

с целым (полуцелым) μ для четных (нечетных) значений завихренности сверхпроводящего параметра порядка n . Подстановка выражения (1.5) в уравнения (1.2) внутри полупроводникового кора приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\check{\mathcal{L}} \Psi_{\mu, k_z}(r) = E \Psi_{\mu, k_z}(r), \quad (1.6a)$$

$$\check{\mathcal{L}} = \tilde{\tau}_z \frac{\hbar^2}{2m^*} \left\{ -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) + \left[\frac{\mu}{r} + \tau_z \frac{m^*}{\hbar} v(r) \right]^2 + k_z^2 \right\} + \tilde{\tau}_z U(r). \quad (1.6b)$$

Здесь $v(r) = (\hbar/2m^*r)(\pi H r^2/\Phi_0 - n)$.

Расчет спектра возбуждений в полностью покрытых нанопроводах выполнялся с помощью точных решений уравнений (1.6) и соответствующих граничных условий для волновой функции квазичастиц на интерфейсе ПП/СП, которые учитывают различные механизмы нормального отражения. Приведем

³Более строгий подход для учета потенциала конфайнмента $U(r)$ должен быть основан на самоогласованном расчете профиля электростатического потенциала и распределения плотности заряда в полупроводниковом коре [171–174].

решения уравнений БДЖ в полупроводниковом коре (1.6) в отсутствие спин-орбитального взаимодействия. Считая

$$\Psi_{\mu, k_z}(r) = \begin{bmatrix} f^+(r) \\ f^-(r) \end{bmatrix}, \quad (1.7)$$

и рассматривая, например, уравнение для электронной компоненты волновой функции, мы имеем

$$\left[-\frac{d}{d\phi} \left(\phi \frac{d}{d\phi} \right) + \frac{1}{4\phi} (\mu_e + \phi)^2 \right] f^+(\phi) = \frac{(E - E_{\parallel}^c - U(r))}{\hbar\omega_c} f^+(\phi), \quad (1.8)$$

где $\phi(r) = \pi H r^2 / 2\Phi_0$, $\mu_e = \mu - n/2$, $\omega_c = eH/m^*c$, и $E_{\parallel}^c = p_z^2/2m^*$. Регулярные решения данного уравнения при $r = 0$ для рассматриваемых профилей потенциала могут быть выражены через вырожденные гипергеометрические функции первого рода ${}_1F_1(a, b, z)$ [175]. Таким образом, решения уравнений БДЖ в полупроводниковом коре в случае плоского профиля дна зоны проводимости $U(r) = U_0$ могут быть представлены в виде

$$f^+(r) = C^+ e^{-\phi/2} \phi^{|\mu_e|/2} {}_1F_1(a_{\mu_e}^+, b_{\mu_e}, \phi), \quad (1.9a)$$

$$f^-(r) = C^- e^{-\phi/2} \phi^{|\mu_h|/2} {}_1F_1(a_{\mu_h}^-, b_{\mu_h}, \phi), \quad (1.9б)$$

$$a_{\mu}^{\gamma} = \frac{|\mu| + \gamma\mu + 1}{2} - \frac{(-E_{\parallel}^c - U_0 + \gamma E)}{\hbar\omega_c}, \quad (1.9в)$$

$$b_{\mu} = |\mu| + 1, \quad (1.9г)$$

где $\mu_h = \mu + n/2$, и $\gamma = \pm$. В случае параболического профиля потенциала $U(r) = a - br^2$, приведенные выше решения модифицируются следующим образом

$$f^+(r) = C^+ e^{-\varkappa\phi/2} \phi^{|\mu_e|/2} {}_1F_1[a_{\mu_e}^+(\varkappa), b_{\mu_e}, \varkappa\phi], \quad (1.10a)$$

$$f^-(r) = C^- e^{-\varkappa\phi/2} \phi^{|\mu_h|/2} {}_1F_1[a_{\mu_h}^-(\varkappa), b_{\mu_h}, \varkappa\phi], \quad (1.10б)$$

$$a_{\mu}^{\gamma}(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa} \left[\frac{\varkappa(|\mu| + 1) + \gamma\mu}{2} + \frac{E_{\parallel}^c + a - \gamma E}{\hbar\omega_c} \right], \quad (1.10в)$$

$$\varkappa = \sqrt{1 - 8b/m^*\omega_c^2}. \quad (1.10г)$$

Решения (1.10) справедливы для действительных \varkappa . В случае $\varkappa = i\sqrt{8b/m^*\omega_c^2 - 1}$ мы получаем

$$f^+(r) = C^+ \phi^{|\mu_e|/2} \text{Re} \left\{ e^{-i\tilde{\varkappa}\phi/2} {}_1F_1[a_{\mu_e}^+(i\tilde{\varkappa}), b_{\mu_e}, i\tilde{\varkappa}\phi] \right\}, \quad (1.11a)$$

$$f^-(r) = C^- \phi^{|\mu_h|/2} \text{Re} \left\{ e^{-i\tilde{\varkappa}\phi/2} {}_1F_1[a_{\mu_h}^-(i\tilde{\varkappa}), b_{\mu_h}, i\tilde{\varkappa}\phi] \right\}. \quad (1.11б)$$

Для вывода граничных условий для волновой функции квазичастиц на интерфейсе ПП/СП со стороны кора необходимо решить уравнения БДЖ в сверхпроводящей оболочке и воспользоваться правилами шивки. Соответствующий расчет приводит к граничному условию вида (детали вывода граничных условий представлены в Приложении A.2)

$$\left. \frac{d\Psi_{\mu, k_z}}{dr} \right|_{r=R_c-0} = \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} \zeta M' - \Lambda M'' & M'' \\ -M'' & \zeta M' + \Lambda M'' \end{pmatrix} \Psi_{\mu, k_z}(R_c - 0), \quad (1.12a)$$

$$M = -\frac{m^*}{m_s} k_{\perp}^s \operatorname{ctg} \left(k_{\perp}^s d_s - i\zeta \frac{m_s |\Delta| d_s}{\hbar^2 k_{\perp}^s} \right). \quad (1.12b)$$

Здесь $\zeta = \sqrt{1 - \Lambda^2}$, $\Lambda = \tilde{E}/\Delta$, $\tilde{E} = E - \mu\hbar V_s(R_c)$, $V_s(R_c) = (\hbar/2m_s R_c)(\Phi/\Phi_0 - n)$, $M' = \operatorname{Re}(M)$ и $M'' = \operatorname{Im}(M)$. Из (1.12b) также следует, что для достаточно тонкой сверхпроводящей оболочки $d_s \lesssim \hbar^2 k_{\perp}^s / m_s |\Delta|$ присутствие дополнительного нормального рассеяния квазичастиц от внешней границы сверхпроводящей оболочки должно приводить к появлению мезоскопических осцилляций подщелевых уровней (при изменении толщины оболочки d_s). В пределе $d_s \gtrsim \xi$ мы имеем

$$M = -ik_{\perp}^s m^* / m_s. \quad (1.13)$$

В численных расчетах спектра энергии квазичастиц в данной главе мы выбираем $\Delta_0/E_F^s = 0.01$ а также отношение эффективных масс, согласующееся со свойствами InAs/Al нанопроволок [176] $m^*/m_s = 0.026$.

1.2 Спектральные свойства квазичастиц

Типичные спектры энергии подщелевых квазичастиц сразу после входа вихря показаны на Рис. 1.2. Данные результаты находятся в хорошем качественном согласии с выражением (1.1) и показывают, что конкуренция между нормальным и андреевским отражением для квазичастиц вблизи интерфейса ПП/СП в многомодовых нанопроводах, действительно, приводит к появлению многократных пересечений спектральными ветвями уровня Ферми. Типичные зависимости подщелевых уровней с $k_z = 0$ показаны на Рис. 1.3. Синие сплошные линии показывают профиль $|\Delta(\Phi)|$, определяемый уравнением (1.3). Из

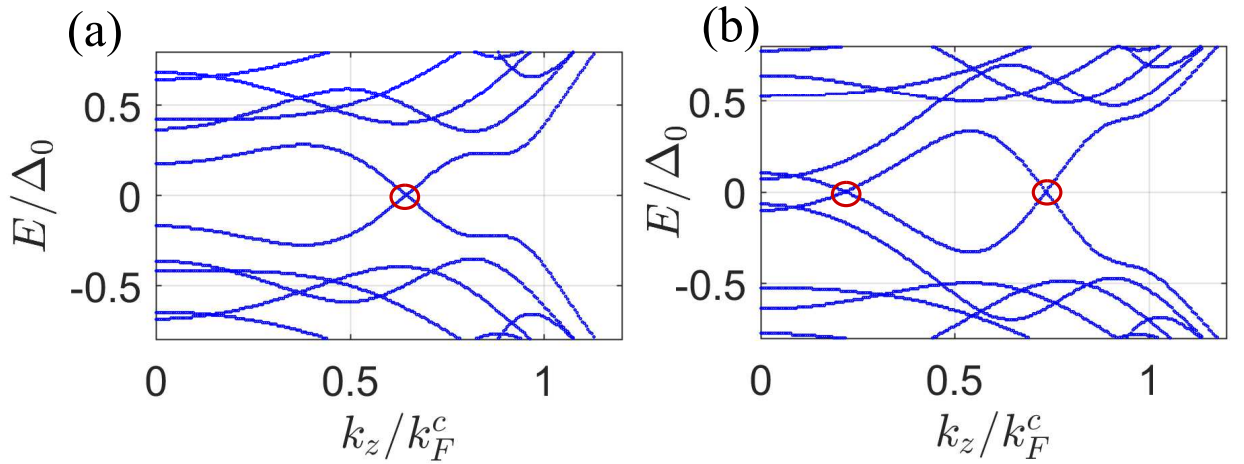


Рисунок 1.2 — Типичные спектры энергии подщелевых квазичастиц после входа вихря ($\Phi = 0.5\Phi_0$) для плоского профиля потенциала в полупроводниковом коре, $R_c = 0.7\xi$ и $\gamma = 0.1$. Результаты на панелях (а) и (b) соответствуют параметрам $\eta = 0.75$, $d_s = R_c$ и $\eta = 0.72$, $d_s = 0.8R_c$. Здес η - отношение Ферми скоростей в металле и в полупроводниковой сердцевине, $\xi = \hbar v_F^s/\Delta_0$, параметр γ введен в (1.3). Красными кружками показаны пересечения подщелевых уровней и уровня Ферми.

Рис. 1.3 можно видеть, что максимумы на зависимостях $E(\Phi)$ смещены влево или вправо по отношению к значениям $\Phi = n\Phi_0$, при которых достигается максимум модуля сверхпроводящего параметра порядка в пределах заданного вихревого состояния. Появления вышеупомянутых наклонов спектральных ветвей происходит за счет сдвига уровней энергии $\mu\omega_H/2$, вызванного орбитальным механизмом, а для расчета точной формы зависимостей $E(\Phi)$ необходим корректный учет неквазиклассических эффектов. Очевидно, что эффект Зеемана, который также приводит к линейному по H сдвигу подщелевых уровней, должен также вносить вклад в асимметрию спектральных ветвей, а также к появлению спин-зависимого расщепления уровней. Мы подчеркиваем, что экспериментально наблюдаемая асимметрия подщелевой плотности состояний от магнитного поля в пределах заданного вихревого состояния в нанопроволках [75] находятся в хорошем качественном согласии с нашими численными расчетами спектров квазичастиц, что подтверждает справедливость рассматриваемой в данной работе модели.

Влияние изгиба зон на формирование пересечений подщелевыми уровнями уровня Ферми и распространяющихся мод в андреевских волноводах проиллюстрировано на Рис. 1.4. Данные графики показывают возвратные зависимости щели в спектре возбуждений гибридного нанопровода от приложенного

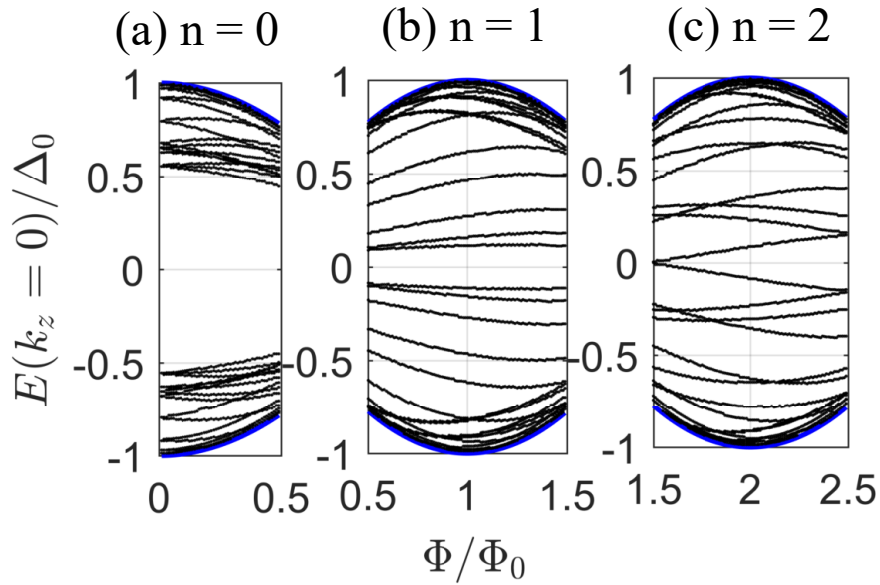


Рисунок 1.3 — Типичные зависимости энергии подщелевых состояний квази-частиц с $k_z = 0$ от приложенного магнитного потока для плоского профиля потенциала и различных значений завихренности $n = 0$ (a), $n = 1$ (b), $n = 2$ (c). Результаты получены для $\eta = 0.8$, $R_c = \xi$, $\gamma = 0.9$ и $d_s \gtrsim \xi$. Синяя сплошная линия показывает соответствующий профиль щели $|\Delta(\Phi)|$, определенный уравнением (1.3).

магнитного потока, а также скачкообразное уменьшение щели при входе вихрей. Сравнивая панели (a) и (b) на Рис. 1.4, мы видим, что возвратное поведение щели является более выраженным в случае потенциала конфайнмента $U(r)$, моделирующего наличие обедненной области для квазичастиц вблизи центра полупроводникового кора. Для того, чтобы получить пересечения спектральных ветвей и уровня Ферми, необходимые для существования топологических переходов в системе, необходимо избегать области параметров, для которых щель переоткрывается. Возвратное поведение щели от продольного магнитного поля должно приводить к нетривиальным особенностям эффекта четности в зарядовом транспорте через нанопроволку в условиях кулоновской блокады. Полученное в данной работе возвратное поведение щели в спектре, показанное на Рис. 1.4(b), может приводить к внезапным переключениям периодичности тока при изменении напряжения на затворе с $2e$ на e при входе вихря с последующим плавным восстановлением к $2e$ при дальнейшем увеличении магнитного потока при заданном вихревом состоянии [177; 178]. Рассматривая для примера одноквантовый вихрь и выбирая типичное значение щели $E_g = 0.25\Delta_0$ [см. Рис. 1.4(b)] в случае сверхпроводящей оболочки из Al с $\Delta_0 \approx 200 \mu\text{eV}$,

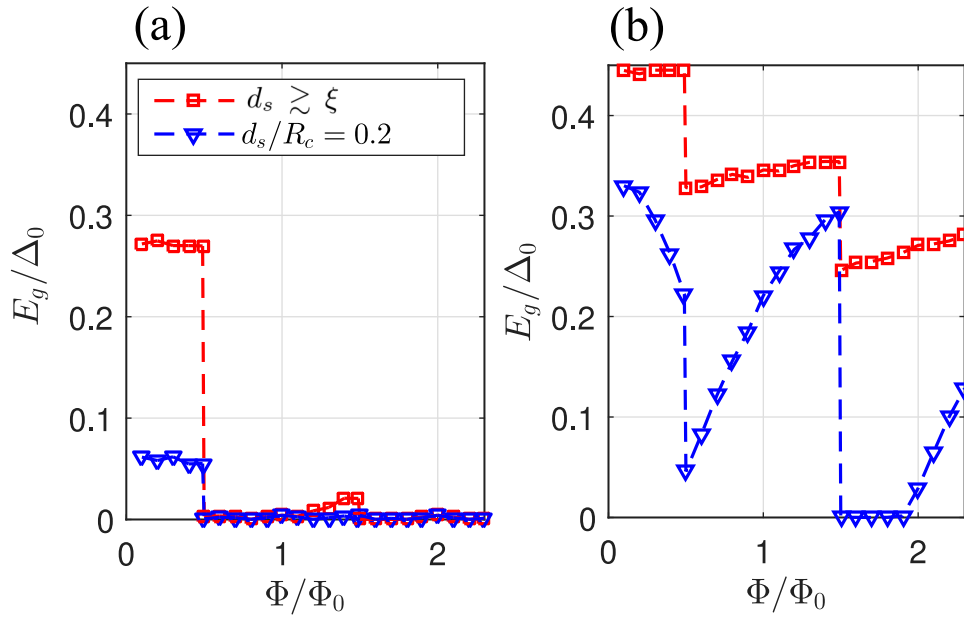


Рисунок 1.4 — Зависимости щели в спектре возбуждений гибридного нанопровода E_g от приложенного магнитного потока для $R_c = 0.8\xi$, $\gamma = 0.1$ и различных d_s . На панели (a) представлены результаты для плоского профиля потенциала с $\eta = 0.6$. Результаты на панели (b) получены для профиля потенциала (1.4) с $U_0 = \Delta_0$ и $\eta = 0.5$.

можно оценить соответствующий диапазон температур, при которых могут наблюдаться вышеупомянутые особенности в эффекте четности $T \lesssim T^* = E_g / \ln(N_{\text{eff}}) \lesssim 0.6$ К [179; 180]. Следует также отметить, что представленное в данной работе численное моделирование зависимостей $E_g(\Phi)$ выполнено без учета спин-орбитального взаимодействия, и, таким образом, полученные результаты не учитывают возможное наличие в системе майорановских состояний.

Суммируя результаты данного раздела, мы ясно видим образование многократных пересечений спектральных ветвей подщелевых квазичастиц и уровня Ферми, а также образование соответствующих мод волноводного типа. Данное наблюдение дает отправную точку для дальнейшего анализа эффектов спин-орбитального взаимодействия, необходимого для полного описания механизма топологического перехода.

1.3 Критерий появления краевых майорановских мод

Приступим к рассмотрению спин-зависимых эффектов. Как было показано в [75], в присутствии спин-орбитального взаимодействия Рашбы с радиальным вектором нормали $\hat{H}_{so} = \alpha \mathbf{e}_r [\hat{\sigma}_z (\mathbf{p} + (e/c) A_\varphi \mathbf{e}_\varphi)]$ решения уравнений БДЖ можно искать в следующем виде:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ik_z z} e^{i[\mu + (1 - \hat{\sigma}_z)/2 - \check{\tau}_z n/2]\varphi} \Psi_{\mu, k_z}(r). \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.2) при учете спин-орбитального взаимодействия и зеемановского поля в полупроводниковом коре, мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{L}} \Psi_{\mu, k_z}(r) &= E \Psi_{\mu, k_z}(r), \quad (1.15) \\ \check{\mathcal{L}} &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - E_\perp^c \right) \check{\tau}_z + V_Z \hat{\sigma}_z \\ &+ \frac{\hbar^2}{2m^* r^2} \left(\mu + \hat{\Pi}_z^- - \frac{n}{2} \check{\tau}_z + \frac{\pi H r^2}{2\Phi_0} \check{\tau}_z \right)^2 \check{\tau}_z \\ &- \frac{\alpha \hbar}{r} \hat{\sigma}_z \check{\tau}_z \left(\mu + \hat{\Pi}_z^- - \frac{n}{2} \check{\tau}_z + \frac{\pi H r^2}{2\Phi_0} \check{\tau}_z \right) + \alpha p_z \check{\tau}_z \hat{\sigma}_y, \end{aligned}$$

где $\hat{\Pi}_z^- = (1 - \hat{\sigma}_z)/2$. Для построения эффективной теории, описывающей низкоэнергетические возбуждения в нанопроводе, мы разложим радиальную часть волновой функции по невозмущенным состояниям (при $V_Z = 0$ и $\alpha = 0$)

$$\Psi_{\mu, k_z}(r) = C_{\mu, k_z}^\uparrow \begin{bmatrix} u_{\mu, k_z}(r) \\ v_{\mu, k_z}(r) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_{\mu, k_z}^\downarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\mu+1, k_z}(r) \\ v_{\mu+1, k_z}(r) \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

Здесь C_{μ, k_z}^\uparrow и C_{μ, k_z}^\downarrow - постоянные, определяющие вектор состояния, $u_{\mu, k_z}(r)$ и $v_{\mu, k_z}(r)$ - электронные и дырочные компоненты невозмущенной волновой функции соответственно. Наконец, подставляя (1.16) в (1.15) и пренебрегая для простоты диагональными поправками к невозмущенным энергетическим уровням за счет спин-орбитального взаимодействия, мы получаем эффективную модель

$$\left[\mathcal{E}_{\mu, k_z}^+ + \left(\mathcal{E}_{\mu, k_z}^- + V_Z \right) \hat{\sigma}_z + \tilde{\alpha} k_z \hat{\sigma}_y \right] \psi_{\mu, k_z} = E_{\mu, k_z} \psi_{\mu, k_z}, \quad (1.17)$$

где $\mathcal{E}_{\mu,k_z}^{\pm} = [\mathcal{E}_{\mu,k_z} \pm \mathcal{E}_{\mu+1,k_z}]/2$, \mathcal{E}_{μ,k_z} - невозмущенный спектр энергии квазичастиц, $\psi_{\mu,k_z} = [C_{\mu,k_z}^{\uparrow}, C_{\mu,k_z}^{\downarrow}]^T$, $\tilde{\alpha} = \alpha\hbar M_{\mu,k_z}$, интеграл перекрытия определяется выражением

$$M_{\mu,k_z} = \int_0^{R_c+d_s} dr r [u_{\mu+1,k_z}(r)u_{\mu,k_z}(r) - v_{\mu+1,k_z}(r)v_{\mu,k_z}(r)] .$$

Используя оценку $M_{\mu,k_z} \sim 1/k_{\perp}^c R_c$, справедливую в пределе $k_F^c \xi \sim 1$, мы получаем уравнение, описывающее расщепленные уровни за счет спин-орбитального взаимодействия

$$E_{\mu,k_z}^{\pm} = \mathcal{E}_{\mu,k_z}^{\pm} \pm \sqrt{(\mathcal{E}_{\mu,k_z}^{\pm} + V_Z)^2 + (\alpha k_z/k_{\perp}^c R_c)^2} . \quad (1.18)$$

Можно видеть, что эффективная модель (1.17) при $\mu = -1/2$ вблизи точек пересечения уровня Ферми k_i

$$\mathcal{E}_{-1/2}^-(k_z) \approx v_g^i(k_z - k_i) , \quad (1.19)$$

по своей форме совпадает с моделью одномерного бесспинового p -волнового сверхпроводника [55; 56; 181]. Здесь v_g^i - групповая скорость, соответствующая i -й волноводной моде.

Для того, чтобы определить топологический инвариант для модельного гамильтониана, описывающего низкоэнергетические состояния квазичастиц (1.17) при $\mu = -1/2$, мы следуем подходу, использованному в работе [182], и рассматриваем гамильтониан общего вида $H(k_z) = \mathbf{d}(k_z)\boldsymbol{\sigma}$. В рассматриваемом случае вектор \mathbf{d} лежит в плоскости zy . Для выяснения топологических свойств этой системы мы вычисляем число обходов W вектора $\mathbf{d}/|\mathbf{d}|$ по единичной окружности при изменении k_z от $-k_F^c$ до $+k_F^c$

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F^c}^{k_F^c} d\theta(k_z) , \quad \theta(k_z) = \arctan [d_y(k_z)/d_z(k_z)] . \quad (1.20)$$

Дальнейшая топологическая классификация квазичастичных состояний зависит от рассматриваемого интервала энергий. В пределе низких энергий ($|E| \ll \delta$) мы находим множество точек $\pm k_i$, в которых спектральная ветвь $\mathcal{E}_{-1/2}^-(k_z)$ пересекает уровень Ферми. Эти точки можно рассматривать как несколько одномерных Ферми поверхностей. Пренебрегая связью между этими одномерными Ферми поверхностями, мы получаем, что топологический индекс

для каждой Ферми поверхности равен ± 1 . Таким образом, для нанопровода конечной длины мы получаем несколько пар майорановских состояний, локализованных вблизи краев нанопровода, и число этих пар равно числу пересечений спектральной ветви уровня Ферми (для выбранного направления k_z и без учета спин-орбитального взаимодействия). Вблизи каждой точки пересечения спектр квазичастиц расщепляется за счет спин-орбитального взаимодействия, и появляется пара майорановских состояний. Соответствующее расщепление определяется выражением $\alpha \hbar k_i / R_c \sqrt{(k_F^c)^2 - k_i^2} \sim \alpha \hbar / R_c$. Взяв $\alpha \hbar \approx 50 \text{ meV \AA}$ [166] и $R_c \approx 70 \text{ nm}$ для типичного нанопровода [65–71], мы получаем оценку на величину топологической щели 0.07 meV , которая оказывается в три раза меньше, чем сверхпроводящая щель в Al. В случае полубесконечного провода $z \in [0, +\infty)$ можно получить явные выражения для волновой функции локализованного состояния квазичастиц на нулевой энергии

$$\Psi(\mathbf{r}) \propto \sin(\beta_i z) e^{-\gamma_i z} \begin{bmatrix} u_{\mu, k_i}(r) e^{-i\varphi} \\ v_{\mu, k_i}(r) \\ \text{sgn}(v_g^i) u_{\mu+1, k_i}(r) \\ \text{sgn}(v_g^i) v_{\mu+1, k_i}(r) e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

$$\beta_i = \frac{k_i}{1 + (\alpha/v_g^i)^2}, \quad \gamma_i = \frac{\alpha k_i}{|v_g^i| [1 + (\alpha/v_g^i)^2]},$$

с характерной длиной затухания

$$\xi_{loc} \sim R_c \frac{v_g^i k_F^c}{\alpha k_i}. \quad (1.22)$$

В (1.21) мы выбрали $k_i > 0$. Подставляя $v_g^i \sim v_F^c$ и $k_i \sim k_F^c$ в (1.22), мы получаем $\xi_{loc} \gg R_c$ в случае слабого спин-орбитального взаимодействия $\alpha \ll v_F^c$.

В более широком диапазоне энергий ($\delta \lesssim |E| \lesssim |\Delta|$) мы более не можем считать одномерные Ферми поверхности изолированными. В данном случае топологический инвариант нужно вычислять для гамильтониана (1.17), учитывая полную дисперсию квазичастичных состояний с $\mu = -1/2$. Полученное в результате расчетов число обходов равняется единице или нулю в случае нечетного и четного числа одномерных Ферми поверхностей, соответственно. Переключение числа обходов дает нам топологический переход и единственную пару майорановских состояний в топологически нетривиальной фазе. Таким образом, топологический переход происходит, когда спектр квазичастиц для $k_z = 0$ становится инвертированным $\delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{-1/2,0} - \mathcal{E}_{1/2,0} > 0$. Из выражения (1) следует, что

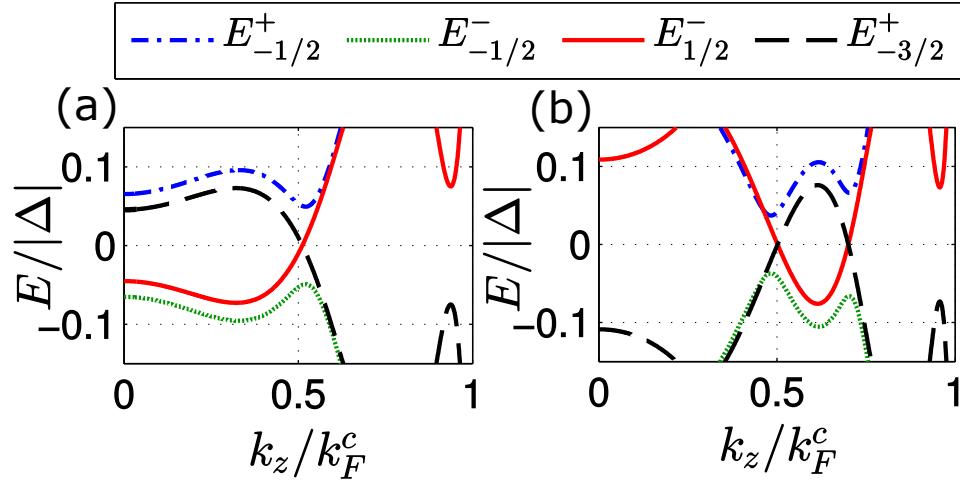


Рисунок 1.5 — Спектры энергии квазичастиц при учете спин-орбитального взаимодействия Рашбы с радиальным вектором нормали для $\delta = 0.2|\Delta|$, $k_F^c \xi_{so} = 0.4$, $\xi_{so} = \alpha/|\Delta|$, $V_Z = 0.01|\Delta|$, $\omega_H/|\Delta| = 0.05$, $k_F^c R_c = 5$ (a), и $k_F^c R_c = 6$ (b).

данная инверсия, возникающего из слагаемого $\delta \mathcal{E} \propto \delta \cos(2k_F^c R_c)$ должна происходить периодически с изменением числа поперечных мод. Появившаяся пара майорановских состояний должна быть устойчива по отношению к возмущениям, нарушающим угловую симметрию, при условии, что низкоэнергетические состояния отделены от состояний в секторах $\mu \neq -1/2$.

Интересно сравнить наши результаты с результатами эффективной модели (5) в работе [74]. Отметим, что модель полого цилиндра (5) в работе [74] описывает состояния квазичастиц, которые локализованы в тонком аккумуляционном слое вблизи границы полупроводник/сверхпроводник. Выражения для спектров квазичастиц (1.18) из данной работы и уравнение (11) в работе [74] приводят к качественно различным свойствам как распространяющихся, так и локализованных состояний квазичастиц. В частности, мы получаем качественно разные зависимости глубины затухания майорановских состояний в случае слабого спин-орбитального взаимодействия: длины локализации обратно пропорциональна константе спин-орбитального взаимодействия в данной работе и пропорциональна данной постоянной в работе [74].

Типичные спектры квазичастиц, определяемые выражениями (1.18) и (1.1) показаны на Рис. 1.5. Для простоты, мы пренебрегаем зависимостью коэффициента отражения \mathcal{R} от продольного импульса. Помимо расщепления уровней, вызванного спин-орбитальным взаимодействием, данные кривые также иллюстрируют существование в системе распространяющихся мод. Действительно, на Рис. 1.5 видно, что радиальное спин-орбитальное взаимо-

действие Рашбы не приводит к расщеплению уровней $E_{1/2}^-$ и $E_{-3/2}^+$ на уровне Ферми. Конечно, различные возмущения, нарушающие угловую симметрию в системе, вызванные, например, наличием примесей, должны приводить к смешиванию состояний с разными проекциями углового момента. Такое смешивание обеспечивает дополнительную связь между бесщелевыми состояниями и, очевидно, должно приводить к появлению дополнительных минищелей в спектре возбуждений. Сравнивая Рис. 1.5 и Рис. 3А из [74], можно видеть, что распространяющиеся моды, которые мы обсуждаем, отсутствуют в работе [74]. Предположительно, данное несоответствие может быть связано с тем, что осцилляции подщелевых уровней в зависимости от продольного импульса $E(k_z)$ являются менее выраженными в случае, когда параметр $(k_F^c)^2 S$ близок к единице (это случай Рис. 3А работы [74]). С другой стороны, подавление амплитуды осцилляций подщелевых уровней может свидетельствовать о доминирующей роли андреевского отражения для квазичастиц, отражающихся от границы полупроводник/сверхпроводник.

Касательно вопроса о нарушении аксиальной симметрии можно выделить как минимум два класса возмущений: первый происходит из-за возможных отклонений единичного вектора в спин-орбитальном взаимодействии Рашбы, а второй класс возникает из-за спин-независящих возмущений (например, из-за присутствия немагнитных примесей в полупроводниковом коре или из-за шероховатости границы кор/оболочка). Оба этих механизма приводят к смешиванию состояний с различными проекциями углового момента на ось нанопровода и открытию дополнительных минищелей в спектре квазичастичных возбуждений, которые определяются абсолютными значениями соответствующих матричных элементов оператора возмущений. В первом случае, спектральная щель определяется произведением константы спин-орбитального взаимодействия и модуля матричного элемента, который связывает состояния с разной проекцией углового момента. С другой стороны, учет спин-независящих возмущений должен приводить к появлению топологически тривиальных щелевых состояний.

1.4 Выводы

Таким образом, в данной главе изучены спектральные свойства полупроводниковых нанопроводов, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, во внешнем магнитном поле, направленном вдоль оси нанопровода. Показано, что конкуренция нормального и андреевского отражения квазичастиц от границы полупроводник/сверхпроводник приводит к появлению мод квазичастиц волноводного типа. Обнаружено качественно различное поведение щели в спектре возбуждений гибридного нанопровода от величины внешнего магнитного потока для разных профилей дна зоны проводимости в полупроводниковом ядре. В случае наличия аккумуляционного слоя для квазичастиц вблизи границы полупроводник/сверхпроводник спектральная щель может иметь возвратное поведение: скачкообразное уменьшение щели при входе вихрей может сопровождаться дальнейшим ее увеличением в пределах состояния с фиксированной завихренностью сверхпроводящего параметра порядка. Изучены эффекты спин-орбитального взаимодействия Рашбы, вызванного радиальными электрическими полями на интерфейсе. Получен критерий возникновения майорановских мод в рассматриваемых системах, получено аналитическое выражение для волновой функции майорановских мод, определен их пространственный масштаб.

Глава 2. Особенности джозефсоновского транспорта через искривленные полупроводниковые нанопровода

В данной главе изучается джозефсоновский транспорт через искривленный полупроводниковый нанопровод. Отличительные особенности стационарного эффекта Джозефсона проанализированы для двух неэквивалентных ориентаций спин-расщепляющего поля в нанопроводе, схематично изображенных на панелях (а) и (b) Рис. 2.1. Рассмотренные в работе конфигурации отличаются микроскопическим механизмом появления наведенного спинового расщепления для электронов в полупроводнике. Для конфигурации, изображенной на Рис. 2.1(а), джозефсоновский контакт находится во внешнем магнитном поле, направленном перпендикулярно подложке, и спиновое расщепление в нанопроводе появляется из-за эффекта Зеемана. В работе также рассмотрена возможность текстурированного спин-расщепляющего поля, направленного параллельно и антипараллельно оси провода в разных его частях (см. Рис. 2.1(b)). Данная конфигурация мотивирована недавними экспериментами по гибридным ферромагнитным нанопроводам InAs/EuS/Al [142]. В таких структурах наведенное спиновое расщепление в нанопроводе имеет обменную природу.

2.1 Модель

Расчеты джозефсоновского транспорта через искривленный полупроводниковый нанопровод выполнены в рамках формализма уравнений Боголюбова - де Жена (БдЖ) [128]:

$$\check{H}_{\text{BdG}}(s)\Psi(s) = E\Psi(s) , \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} \check{H}_{\text{BdG}}(s) = & \xi(s)\check{\tau}_z + \mathbf{h}(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ & + |\Delta|[\check{\tau}_x \cos \varphi(s) - \check{\tau}_y \sin \varphi(s)] - \frac{\alpha}{2} \{ \hat{\sigma}_n(s), p \} \check{\tau}_z . \end{aligned} \quad (2.1b)$$

Здесь координата s вдоль провода параметризует положение нанопровода $\mathbf{r}(s) = [x(s), y(s)]$, $\xi(s) = p^2/2m - \mu(s)$, $p = -i\hbar\partial_s$, m - эффективная масса, $\mu(s)$ - профиль химпотенциала, α - постоянная спин-орбитального взаимодействия, $\{A, B\} = AB + BA$, $\hat{\sigma}_n(s) = \hat{\sigma}_x \sin \chi(s) - \hat{\sigma}_y \cos \chi(s)$, $\chi(s)$ - угол между

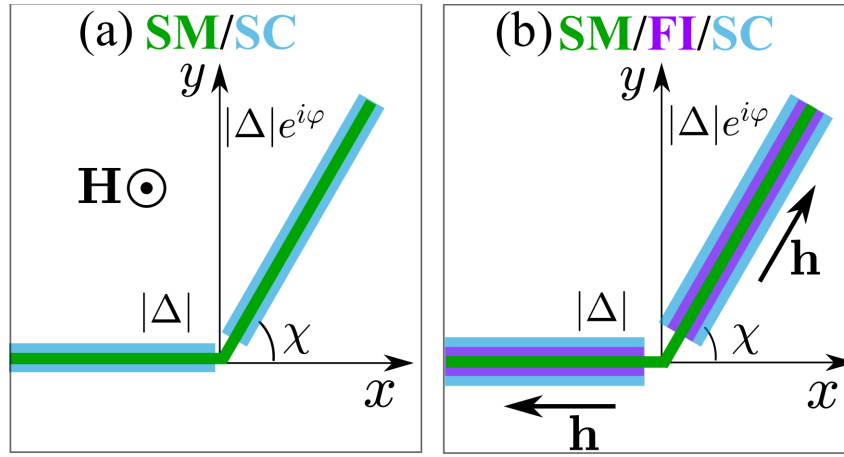


Рисунок 2.1 — Схематичное изображение джозефсоновского контакта с искривленным полупроводниковым нанопроводом в области слабой связи. Здесь φ - разность фаз сверхпроводящего параметра порядка в берегах контакта, и χ - угол разориентации. На панелях (а) и (б) показаны модельные конфигурации спин-расщепляющего поля в нанопроводе, рассмотренные в данной главе. На панели (а) гибридный нанопровод полупроводник/сверхпроводник (SM/SC) находится во внешнем магнитном поле \mathbf{H} , а на панели (б) в нанопроводе наводится текстурированное спин-расщепляющее поле за счет спин-зависимого туннелирования через слой ферромагнитного изолятора (FI).

вектором касательной в точке $\mathbf{r}(s)$ и осью Ox , $\hat{\sigma}_i$ ($i = x, y, z$) - матрицы Паули в пространстве спина, $\tilde{\tau}_i$ ($i = x, y, z$) - матрицы Паули в пространстве электрондырка, и $\Psi(s) = [u_{\uparrow}(s), u_{\downarrow}(s), v_{\downarrow}(s), v_{\uparrow}(s)]^T$ - волновая функция квазичастиц. Основные особенности стационарного эффекта Джозефсона, вызванные топологическим переходом в спектре энергии квазичастиц, проанализированы для следующих модельных профилей спин-расщепляющего поля в нанопроводе:

$$\mathbf{h}(s) = [0, 0, -h_{\perp}] , \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{h}(s) = h_{\parallel} \text{sgn}(s) [\cos \chi(s), \sin \chi(s), 0] , \quad (2.2b)$$

схематично показанных на панелях (а) и (б) Рис. 2.1, соответственно. Важно отметить, что кривизна нанопровода не влияет на критерий топологического перехода в системе. Изогнутый нанопровод находится в топологически тривиальном (нетривиальном) режиме, когда условие $h_{\perp}, h_{\parallel} < h_c$ ($h_{\perp}, h_{\parallel} > h_c$) выполнено в обеих частях нанопровода. Значение зеемановского поля, при котором происходит топологический переход, дается выражением $h_c = \sqrt{\mu^2 + |\Delta|^2}$. Анализ, проведенный в рамках данной работы, ограничен случаем коротких и сильно искривленных джозефсоновских контактов, для описания которых были

использованы ступенчатые профили для фазы сверхпроводящего порядка и геометрической фазы $\varphi(s) = \varphi\Theta(s)$, $\chi(s) = \chi\Theta(s)$, где $\Theta(x)$ - функция Хевисайда.

Уравнения БдЖ (2.1) должны быть дополнены соответствующими граничными условиями в точке изгиба нанопровода, которые учитывают различные механизмы рассеяния квазичастиц. Такие механизмы могут включать в себя спин-независящее рассеяние [183], рассеяние на спин-активной границе [184; 185] и/или на границе с сильным спин-орбитальным взаимодействием [186]. Для простоты в рамках данной работы обсуждаются два механизма рассеяния: (i) спин-зависящее рассеяние, которое возникает за счет текстурированного спин-орбитального взаимодействия в искривленном нанопроводе, (ii) спин-независящее рассеяние. Анализ первого из вышеупомянутых механизмов проводился с помощью численного моделирования. Эффекты спин-независящего рассеяния проанализированы в рамках приближенного аналитического подхода, развитого для первой модельной конфигурации системы (см. Рис. 2.1(a)).

Ток-фазовое соотношение джозефсоновского контакта при нулевой температуре $I_s(\varphi)$ определяется из решения спектральной задачи [187]

$$I_s(\varphi) = \frac{2e}{\hbar} \frac{\partial E_{tot}}{\partial \varphi}, \quad E_{tot}(\varphi) = -\frac{1}{2} \sum_n E_n(\varphi), \quad (2.3)$$

где e - заряд электрона, E_{tot} - энергия контакта. Суммирование в уравнениях (2.3) проводится по положительным собственным значениям E_n задачи (2.1). Здесь и далее сверхпроводящая разность фаз, соответствующая основному состоянию (минимуму функции $E_{tot}(\varphi)$) называется аномальной фазой и обозначается φ_0 . Легко видеть из уравнений (2.3), что когда $E_{tot}(\varphi)$ имеет один минимум, аномальная фаза может быть получена из ток-фазовых соотношений

$$I_s(\varphi_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial I_s}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi_0} > 0. \quad (2.4)$$

Перед тем как приступить к обсуждению результатов, кратко обсудим область применимости используемой модели, которая также была использована в работах [130–132] для изучения джозефсоновского транспорта через прямые нанопровода ($\chi = 0$). Во-первых, основные результаты данной главы получены в рамках простейшей одномерной модели для полупроводникового нанопровода с наведенной сверхпроводимостью [55; 56]. Таким образом, наши результаты не могут претендовать на количественное описание джозефсоновского транспорта через искривленный полупроводниковый нанопровод,

имеющий несколько транспортных каналов. Тем не менее, можно ожидать, что качественные спин-зависящие эффекты, обсуждаемые в данной работе, сохранятся и в квазиодномерном случае. Во-вторых, справедливость используемой в работе феноменологической модели сверхпроводящего эффекта близости ограничена случаем малой частоты туннелирования для электронов из сверхпроводника в полупроводник $\Gamma \ll \Delta_0$, где $\Gamma \propto t^2 \nu_0$, t - туннельный матричный элемент, ν_0 - плотность состояний на уровне Ферми металлической оболочки в несверхпроводящем состоянии, и Δ_0 - щель в спектре возбуждений родительского сверхпроводника [58; 188]. В этом пределе модуль параметра наведенной щели в полупроводниковом проводе равен частоте туннелирования $|\Delta| = \Gamma$. Стоит также отметить, что для последовательного описания эффекта близости также необходимо учитывать перенормировку спектра низкоэнергетических квазичастиц, возникающую за счет диагональных матричных элементов туннельной собственно-энергетической части в пространстве электрон-дырка [58; 188]. Предполагая, что основной вклад в джозефсоновский транспорт дают квазичастичные возбуждения с энергией меньше Δ_0 в родительском сверхпроводнике, этой перенормировкой можно пренебречь, так как она оказывается малой по параметру Γ/Δ_0 .

2.2 Влияние спин расщепляющего поля в нанопроводе на основные характеристики джозефсоновского транспорта. Качественная картина

2.2.1 Поперечное зеемановское поле

В данном разделе представлены аналитические результаты, полученные для модельной конфигурации системы, показанной на Рис. 2.1(а). Для построения эффективной теории низкоэнергетичных возбуждений в искривленном нанопроводе оказывается полезным переписать уравнения БДЖ (2.1) для бес-

конечного прямого нанопровода

$$\check{H}(k)\Psi(k) = E\Psi(k) , \quad (2.5a)$$

$$\check{H}(k) = \xi_k \check{\tau}_z - h_{\perp} \hat{\sigma}_z \quad (2.5b)$$

$$+ |\Delta| [\check{\tau}_x \cos \varphi - \check{\tau}_y \sin \varphi] - \lambda_k \hat{\sigma}_n(\chi) \check{\tau}_z .$$

в базисе так называемых геликоидальных состояний [44; 129] - собственных состояний гамильтониана

$$\hat{H}_0 = [\xi_k - h_{\perp} \hat{\sigma}_z - \lambda_k \hat{\sigma}_n(\chi)] . \quad (2.6)$$

Здесь $\hbar k$ - импульс квазичастиц вдоль провода, $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \mu$, и $\lambda_k = \alpha \hbar k$. В геликоидальном базисе полная система уравнений БДЖ с учетом спина (2.5) принимает вид

$$\check{\mathcal{H}}_{hs}(k)\Psi_{hs}(k) = E\Psi_{hs}(k) , \quad (2.7a)$$

$$\check{\mathcal{H}}_{hs}(k) = \begin{bmatrix} \varepsilon_+(k) & \Delta_{p+}(k) & 0 & \Delta_s(k) \\ \Delta_{p+}^{\dagger}(k) & -\varepsilon_+(k) & \Delta_s^{\dagger}(k) & 0 \\ 0 & \Delta_s(k) & \varepsilon_-(k) & \Delta_{p-}(k) \\ \Delta_s^{\dagger}(k) & 0 & \Delta_{p-}^{\dagger}(k) & -\varepsilon_-(k) \end{bmatrix} , \quad (2.7b)$$

где $\varepsilon_{\pm}(k) = \xi_k \pm \sqrt{h_{\perp}^2 + \lambda_k^2}$ - собственные значения оператора (2.6), и $\Psi_{hs} = [u_+, v_+, u_-, v_-]^T$ - волновая функция квазичастиц в геликоидальном базисе. Таким образом, исходная БДЖ модель (2.5) сводится к модели, описывающей два одномерных p -волновых сверхпроводника

$$\Delta_{p+}(k) = |\Delta| e^{i(\varphi+\chi)} \frac{i\lambda_k}{\sqrt{h_{\perp}^2 + \lambda_k^2}} , \quad (2.8a)$$

$$\Delta_{p-}(k) = |\Delta| e^{i(\varphi-\chi)} \frac{i\lambda_k}{\sqrt{h_{\perp}^2 + \lambda_k^2}} , \quad (2.8b)$$

связанных через четную по импульсу квазичастиц функцию щели s -типа

$$\Delta_s(k) = |\Delta| e^{i\varphi} \frac{h_{\perp}}{\sqrt{h_{\perp}^2 + \lambda_k^2}} . \quad (2.9)$$

В пределе $\mu \gg |\Delta|, m\alpha^2$ и $h_\perp \gtrsim |\Delta|$ можно пренебречь функцией щели $\Delta_s(k)$ [44; 128; 129]. В результате, матрица (2.76) становится блочно диагональной

$$\check{\mathcal{H}}_{hs}(k) = \begin{bmatrix} \check{H}_+(k) & 0 \\ 0 & \check{H}_-(k) \end{bmatrix}, \quad (2.10a)$$

$$\check{H}_\eta(k) = \begin{bmatrix} \xi_k + \eta h_\perp & \frac{i\lambda_k |\Delta|}{h_\perp} e^{i(\varphi + \eta\chi)} \\ -\frac{i\lambda_k |\Delta|}{h_\perp} e^{-i(\varphi + \eta\chi)} & -\xi_k - \eta h_\perp \end{bmatrix}. \quad (2.10b)$$

Здесь $\eta = \pm$ - индекс спин-отщепленной подзоны. Обобщение данной модели на пространственно-неоднородный случай может быть выполнено так же, как это делается, например, в работе [128] или просто заменой $k \rightarrow -i\partial_s$ в приведенных выше матрицах, вводя соответствующие антикоммутирующие операторы, для того, чтобы учесть пространственную зависимость сверхпроводящей разности фаз $\varphi(s)$ и геометрической фазы $\chi(s)$. В результате, мы получаем следующую эффективную модель для описания низкоэнергетичных возбуждений:

$$\check{H}_\eta(s) = \begin{bmatrix} \xi(s) + \eta h_\perp & \Delta_{p\eta}(s) \\ \Delta_{p\eta}^\dagger(s) & -\xi(s) - \eta h_\perp \end{bmatrix}, \quad (2.11a)$$

$$\Delta_{p\eta}(s) = \frac{i\alpha}{2h_\perp} \left\{ \Delta(s) e^{i\eta\chi(s)}, p \right\}, \quad (2.11b)$$

Таким образом, в рассматриваемом предельном случае полный сверхток через искривленный нанопровод может быть аппроксимирован суммой сверхтоков, переносимых андреевскими состояниями, возникающими в каждой спиновой подзоне.

Особенно простые выражения для спектра энергии подщелевых квазичастиц и ток-фазового соотношения могут быть получены из модели (2.11) в рамках квазиклассического приближения. Мы получаем следующие результаты для спектра андреевских уровней:

$$E_\eta(\varphi) = \pm |\Delta_\eta| \cos [(\varphi + \eta\chi) / 2], \quad (2.12a)$$

$$|\Delta_\eta| = |\Delta| \operatorname{Re} \left[\sqrt{2m\alpha^2(\mu - \eta h_\perp)} \right] / h_\perp. \quad (2.12b)$$

Здесь $|\Delta_\eta|$ - наведенная щель в спектре квазичастиц геликоидальной подзоны η . Подставляя уравнение (2.12) в (2.3) и производя суммирование по индексу

спиновой подзоны, мы получаем ток-фазовое соотношение при нулевой температуре

$$I_s(\varphi) = \sum_{\eta=\pm} \mathcal{I}_\eta \sin [(\varphi + \eta\chi)/2] \operatorname{sgn} \{ \cos [(\varphi + \eta\chi)/2] \} , \quad (2.13)$$

где $\mathcal{I}_\eta = e|\Delta_\eta|/2\hbar$ - критический сверхток подзоны η . Из уравнения (2.12a) можно видеть, что дисперсия подщелевых уровней от разных спиновых подзон имеют противоположный по знаку фазовый сдвиг ($\pm\chi$). Другим важным обстоятельством для последующего анализа является то, что щели $|\Delta_\eta|$ демонстрируют качественно различное поведение по отношению к спиновому расщеплению в силу разной зависимости импульсов Ферми в спин-отщепленных подзонах $p_{F\eta} = \operatorname{Re}[\sqrt{2m(\mu - \eta h_\perp)}]$ от зеемановского поля. Действительно, из (2.126) следует, что щель $|\Delta_-|$ отлична от нуля во всем рассматриваемом диапазоне зеемановских полей (в топологически тривиальной и нетривиальной фазах). В свою очередь, щель $|\Delta_+|$ уменьшается с увеличением спинового расщепления и обращается в нуль при топологическом переходе (заметим, что в пределе $\mu \gg |\Delta|$ топологический переход в спектре квазичастиц происходит при $h_\perp \approx \mu$). При $h_\perp > \mu$ дно верхней спин-отщепленной подзоны (в несверхпроводящем состоянии) $\eta = +$ располагается выше уровня Ферми и, таким образом, вклад от данной спиновой подзоны в сверхток исчезает в топологически нетривиальной фазе. Из простого вычисления энергии джозефсоновского контакта для спектра энергии подщелевых квазичастиц (2.12a) следует, что энергия контакта как функция сверхпроводящей разности фаз φ имеет два конкурирующих локальных минимума. Это, в свою очередь, приводит к нетривиальному поведению аномальной фазы при изменении спин-расщепляющего поля. Типичные зависимости $\varphi_0(h_\perp)$ представлены на Рис. 2.2(a) для $\chi = \pi/4, \pi/2$ и $3\pi/4$. В частности, при $\chi = \pi/4$ аномальная фаза увеличивается с увеличением h_\perp и затем выходит на значение геометрической фазы χ . Для $\chi = 3\pi/4$ и при $h_\perp \sim \Delta$ значение аномальной фазы $\varphi_0 \approx \pi$. В этом случае аномальная фаза уменьшается с увеличением h_\perp и выходит на $\varphi_0 = \chi$ при $h_\perp \geq \mu$. Интересный случай реализуется для $\chi = \pi/2$. Соответствующие результаты изображены черными кривыми на Рис. 2.2(a). В этом случае основное состояние контакта при $h_\perp < \mu$ является двукратно вырожденным. Отметим, что во всем диапазоне зеемановских полей кроме непосредственной окрестности топологического перехода, где квазиклассическое приближение для верхней спин-отщепленной

подзоны нарушается, выражение (2.13) находится в хорошем согласии с результатами численного моделирования для $\mu \gg |\Delta|$ (см. Раздел 2.3).

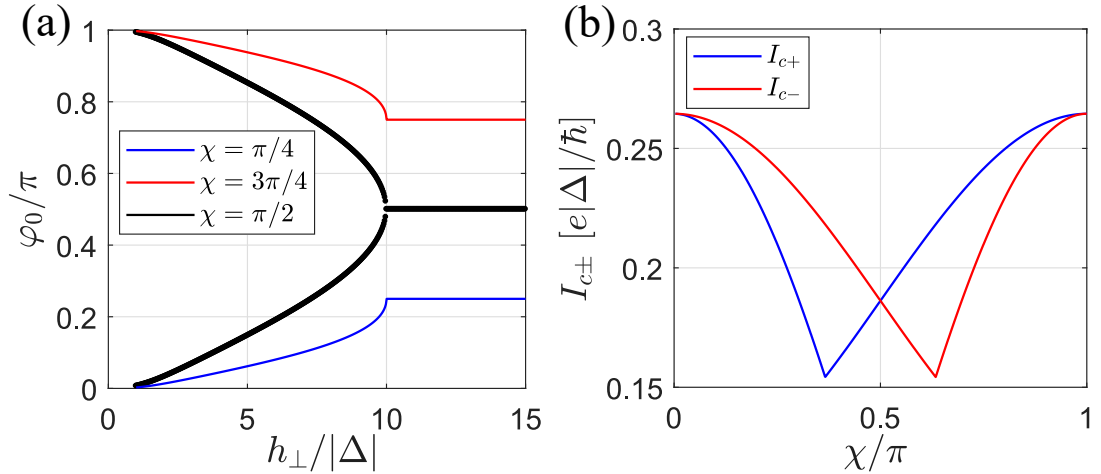


Рисунок 2.2 — (а) Зависимости спонтанной разности фаз от спин-расщепляющего поля h_{\perp} для углов разориентации $\chi = \pi/4$, $\pi/2$ и $3\pi/4$. Графики представляют результат (2.3) и (2.12а). (б) Зависимости $I_{c\pm}(\chi)$, полученные с помощью (2.14) для $h_{\perp} = 7|\Delta|$. Результаты на (а) и (б) соответствуют $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ и $\mu = 10|\Delta|$ в обеих частях нанопровода.

Обсудим теперь основные транспортные характеристики эффекта Джозефсона. В частности, мы исследуем сверхпроводящий диодный эффект, и, следуя работе [100], вводим следующие величины: I_{c+} (максимум джозефсоновского тока) и I_{c-} (модуль минимума тока). Заметим, что возможность невзаимного сверхпроводящего транспорта через искривленный нанопровод с наведенной сверхпроводимостью не запрещен соображениями симметрии, так как текстурированное спин-орбитальное взаимодействие (2.16) нарушает симметрию инверсии $s \rightarrow -s$. Таким образом, при отличной от нуля константе спин-орбитального взаимодействия α и в присутствии поперечного зеемановского поля в системе есть выделенное направление, которое совпадает с направлением протекания сверхтока. Из ток-фазовых соотношений (2.13) можно получить следующие выражения для критических токов при разных направлениях пропускаемого тока:

$$I_{c+} = \begin{cases} \mathcal{I}_- \cos \chi + \mathcal{I}_+ , & 0 \leq \chi \leq \chi_0 , \\ \mathcal{I}_- - \mathcal{I}_+ \cos \chi , & \chi_0 < \chi \leq \pi , \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$I_{c-} = \begin{cases} |\mathcal{I}_- + \mathcal{I}_+ \cos \chi| , & 0 \leq \chi \leq \pi - \chi_0 , \\ |\mathcal{I}_- \cos \chi - \mathcal{I}_+| , & \pi - \chi_0 < \chi \leq \pi . \end{cases} \quad (2.14b)$$

Здесь $\chi_0 = 2 \arctan(\sqrt{\mathcal{I}_+/\mathcal{I}_-})$. Типичные зависимости $I_{c\pm}(\chi)$ показаны на Рис. 2.2(b).

Обсудим теперь влияние дополнительного спин-независящего рассеяния в области изгиба нанопровода на транспортные характеристики контакта. Данный эффект для простоты моделируется слагаемым $V_0 \tilde{\tau}_z \delta(s)$, добавленным в гамильтониан (2.11a). В результате, спин-независящее рассеяние не меняет форму ток-фазового соотношения (2.13), а приводит к перенормировке критических токов для каждой спин-отщепленной подзоны $\mathcal{I}_{\pm} = e|\Delta_{\eta}| \sqrt{D_{\eta}}/\hbar$. Здесь $D_{\eta} = (1 + Z_{\eta}^2)^{-1}$ - прозрачность каждого контакта из одномерных p -волновых сверхпроводников, и $Z_{\eta} = mV_0/\hbar p_{F\eta}$ - соответствующий параметр силы барьера. Таким образом, все качественные спин-зависящие эффекты, проанализированные в данном разделе, должны сохраниться в случае спин-независящего рассеяния, хотя такое рассеяние, естественно, приводит к подавлению сверхтока. Относительно возможной роли спин-зависящего рассеяния, можно отметить, что такого рода механизм приведет к изменению соотношения двух вкладов от спиновых подзон в сверхток. Тем не менее, можно ожидать, что наши предсказания также должны иметь место и в этом случае кроме довольно экзотических ситуаций, когда из-за спин-зависящего рассеяния полностью подавлен вклад в сверхток от одной из спиновых подзон.

2.2.2 Текстурованное спин-расщепляющее поле

Перед тем, как приступить к обсуждению результатов численного моделирования, отметим, что аномальный эффект Джозефсона в системе отсутствует, когда направление спин-расщепляющего поля совпадает с направлением оси нанопровода

$$\mathbf{h}(s) = h_{\parallel} [\cos \chi(s), \sin \chi(s), 0] . \quad (2.15)$$

Действительно, для данного профиля спин-расщепляющего поля можно показать, что операторы $\check{H}_{\text{ВдГ}}(s, \varphi)$ и $\check{H}_{\text{ВдГ}}(s, -\varphi)$ связаны между собой унитарным преобразованием. Соответственно, спектры энергии квазичастиц являются чет-

ными функциями сверхпроводящей разности фаз

$$\check{H}_{\text{BdG}}(s, -\varphi) = \hat{\sigma}_x \mathcal{P} \check{H}_{\text{BdG}}(s, \varphi) \mathcal{P} \hat{\sigma}_x, \quad (2.16a)$$

$$E_n(\varphi) = E_n(-\varphi). \quad (2.16b)$$

Здесь \mathcal{P} - оператор четности $\mathcal{P}f(s) = f(-s)$. Используя уравнения (2.166) и (2.3), мы получаем следующее симметричное соотношение для джозефсоновского тока $I_s(\varphi) = -I_s(-\varphi)$, которое отражает нарушение в системе симметрии относительно обращения времени. Данное симметричное соотношение накладывает следующие ограничения на диапазон возможных значений аномальной фазы $\varphi_0 = \pi n$, где n - целое число. Для того, чтобы получить отличную от πn спонтанную разность фаз в основном состоянии контакта, необходимо рассматривать текстурированный профиль спин-расщепляющего поля.

В конце данного раздела мы рассмотрим случай, когда спин-расщепляющее поле направлено параллельно и антипараллельно оси нанопровода в разных его частях (см. Рис. 2.1(b)). Главным отличием данной конфигурации от рассмотренной ранее (см. Рис. 2.1(a)) является то, что текстурированный профиль спин-расщепляющего поля приводит к разной спиновой структуре волновой функции квазичастиц в разных частях провода. Следовательно, упрощенное теоретическое описание эффекта Джозефсона, развитое для модельной конфигурации, показанной на Рис. 2.1(a), неприменимо, так как граничные условия в области контакта связывают собственные состояния квазичастиц из обеих спиновых подзон. Это обстоятельство усложняет аналитическое описание для случая текстурированного спин-расщепляющего поля, и поэтому здесь мы ограничимся некоторыми качественными соображениями, полученными из анализа результатов численного моделирования. Нетривиальное поведение аномальной фазы от обменного поля и сверхпроводящий диодный эффект в системе возникают в силу необычного ток-фазового соотношения, в котором можно выделить два вклада: (i) вклад от подщелевых состояний квазичастиц и (ii) вклад от надщелевых резонансных уровней. Для достаточно больших спиновых расщеплений $h_{\parallel} \gtrsim \mu$ вклад подщелевых состояний сильно зависит от угла разориентации нанопроводов χ , что является проявлением спин-фильтрующих свойств искривленного джозефсоновского контакта с магнитной текстурой. В ходе численного моделирования мы также видим, что вклад в сверхток от резонансных уровней, в основном, происходит из области энергий $E \in [h_{\parallel} - |\Delta|, h_{\parallel} + |\Delta|]$.

2.3 Результаты численного моделирования джозефсоновского транспорта

2.3.1 Поперечное зеемановское поле

В данном разделе представлены результаты численного моделирования джозефсоновского транспорта для модельного профиля зеемановского поля (2.2a). Типичные спектры энергии подщелевых состояний квазичастиц показаны на Рис. 2.3. Рассмотрим сначала случай сильных зеемановских полей $h_{\perp} \gtrsim h_c$ [см. панели (a) и (b) на Рис. 2.3]. В рамках численного решения задачи получено, что в этом режиме вклад подщелевых состояний в сверхток является доминирующим, и, таким образом, для полного описания стационарного эффекта Джозефсона достаточно ограничиться анализом спектров энергии подщелевых квазичастиц. Графики, показанные на панелях (a) и (b) Рис. 2.3 демонстрируют хорошее согласие между аналитическими и численными результатами. При приближении к топологическому переходу из топологически нетривиальной области фазовой диаграммы аналитический подход, развитый в работах [127; 128] более неприменим, и для корректного расчета сверхтока необходимо также учитывать вклад от надщелевых резонансных уровней. Типичные спектры энергии подщелевых состояний квазичастиц вблизи топологического перехода показаны на панелях (c) и (d) Рис. 2.3. В частности, результаты на Рис. 2.3(c) показывают, что дисперсия подщелевых уровней энергии в зависимости от сверхпроводящей разности фаз φ отлична от нуля только вблизи пересечения спектральной ветви и уровня Ферми. В результате, вклад подщелевых состояний в сверхток вблизи топологического перехода оказывается пренебрежимо мал в широком диапазоне значений φ , и спонтанная разность фаз сверхпроводящего параметра порядка в основном состоянии происходит из-за вклада надщелевых уровней [см. Рис. 2.3(d)]. В отличие от случая зеемановских полей h_{\perp} , сильно превышающих поле h_c , результаты на Рис. 2.3(d) показывают, что аномальный фазовый сдвиг отличается от угла разориентации нанопроводов χ вблизи топологического перехода.

Типичные зависимости $\varphi_0(h_{\perp})$ в широком диапазоне зеемановских полей, покрывающем как топологически тривиальную, так и нетривиальную область

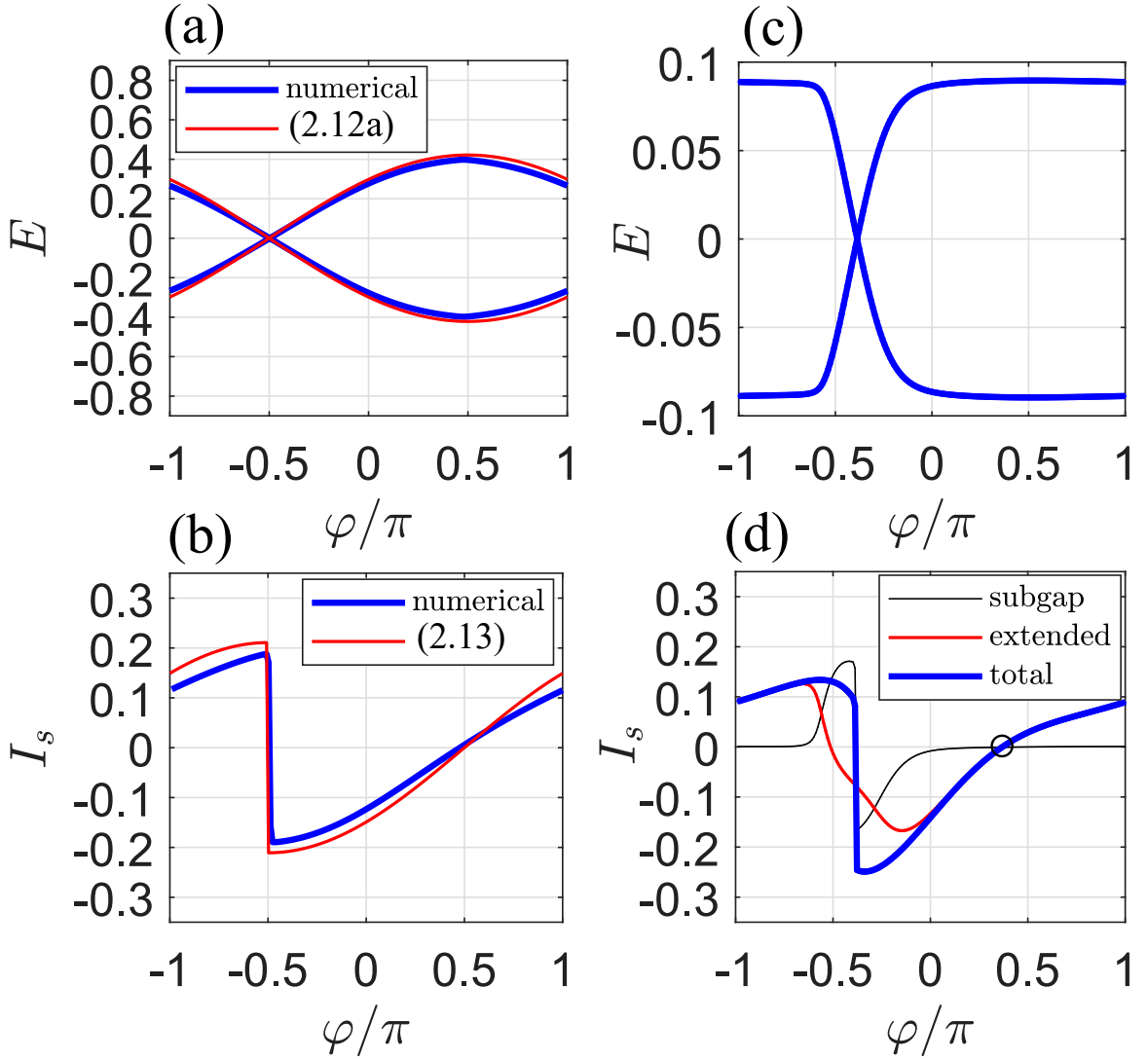


Рисунок 2.3 — Типичные спектры энергии подщелевых квазичастиц $E(\varphi)$ и ток-фазовые соотношения $I_s(\varphi)$ для модельного профиля спин-расщепляющего поля (2.2a). Здесь и далее величины размерности энергии нормированы на $|\Delta|$, а сверхток дан в единицах $e|\Delta|/\hbar$. Графики построены для $\chi = \pi/2$, $\mu = |\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода. Топологический переход в системе происходит при $h_{\perp} = \sqrt{2}|\Delta|$. Панели (a) и (b) соответствуют $h_{\perp} = 3|\Delta|$ в то время, как для панелей (c) и (d) $h_{\perp} = 1.5|\Delta|$. Черными кружками показано значение сверхпроводящей разности фаз, соответствующей минимуму энергии джозефсоновского контакта E_{tot} (аномальная фаза φ_0).

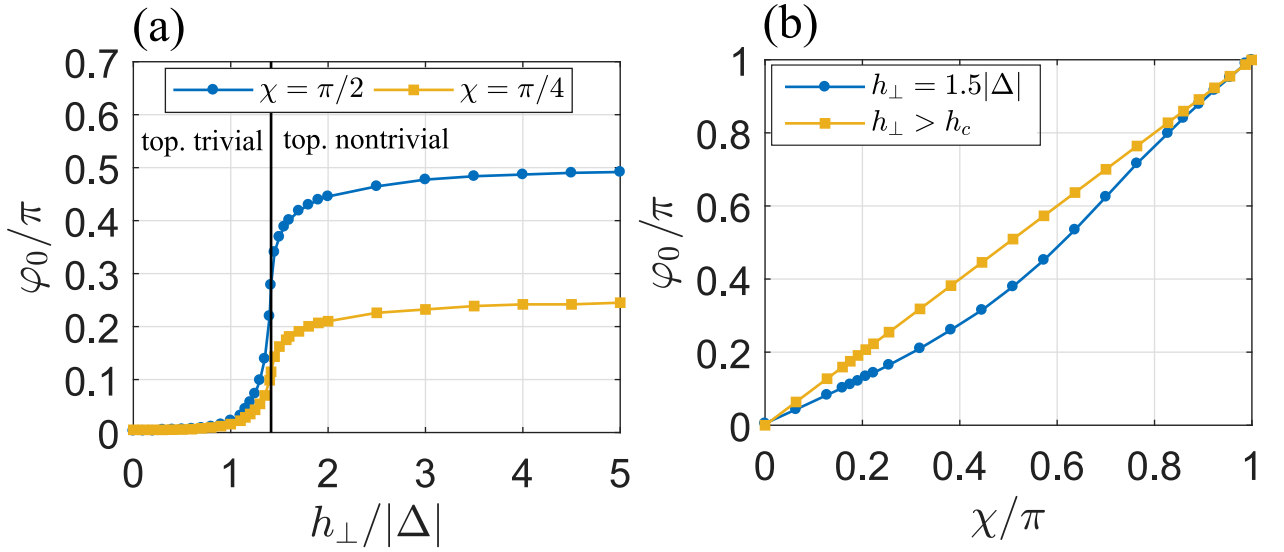


Рисунок 2.4 — Типичные зависимости $\varphi_0(h_\perp)$ (a) и графики $\varphi_0(\chi)$ (b) для модельного профиля зеемановского поля (2.2a). Результаты получены для $\mu = |\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода. В системе происходит топологический переход при $h_\perp = \sqrt{2}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (a)].

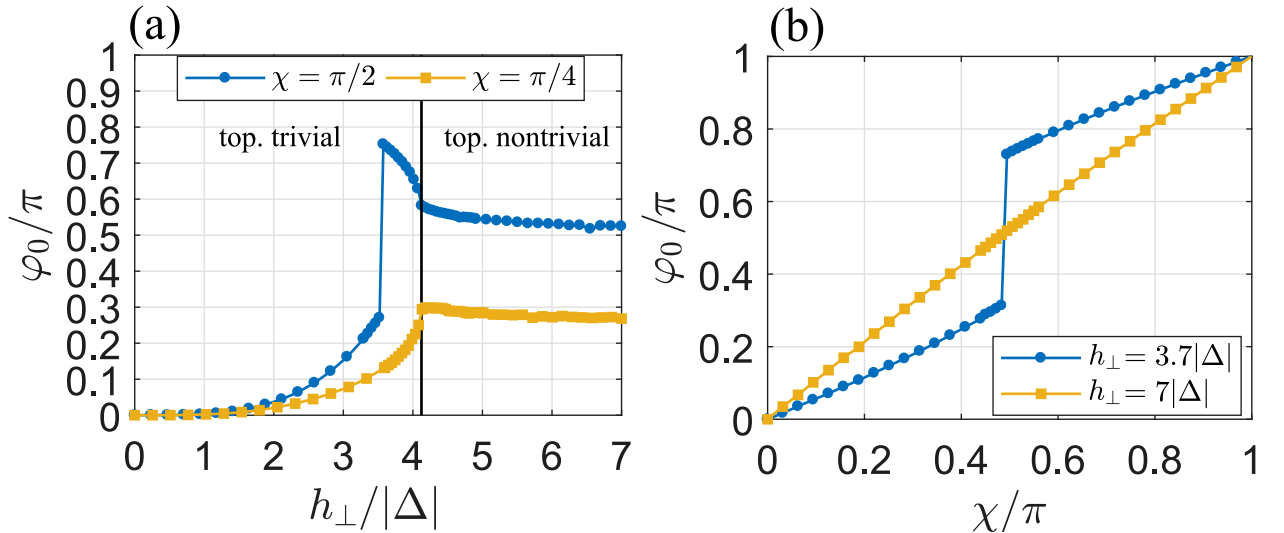


Рисунок 2.5 — Типичные зависимости $\varphi_0(h_\perp)$ (a) и графики $\varphi_0(\chi)$ (b) для профиля спин-расщепляющего поля (2.2a). Параметры: $\mu = 4|\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода. Топологический переход в системе происходит при $h_\perp = \sqrt{17}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (a)].

фазовой диаграммы, показаны на Рис. 2.4(а) и 2.5(а). Графики, показанные на Рис. 2.4(а) и 2.5(а), построены для $\mu = |\Delta|$ и $\mu = 4|\Delta|$, соответственно. Полученные результаты показывают, что аномальная фаза исчезает при $h_{\perp} \lesssim |\Delta|$ в то время, как $\varphi_0 \approx \chi$ для $h_{\perp} \gg h_c$. Можно заметить, что между этими двумя предельными случаями кривые $\varphi_0(h_{\perp})$ на Рис. 2.4(а) и 2.5(а) демонстрируют качественно различное поведение. Действительно, на графиках на Рис. 2.4(а) можно видеть плавную перестройку аномальной фазы зеemanовским полем. Увеличение химпотенциала μ приводит к появлению особенностей на зависимостях $\varphi_0(h_{\perp})$ при топологическом переходе [см. Рис. 2.5(а)]. Кроме того, результаты на Рис. 2.5(а) для $\chi = \pi/2$ показывают скачкообразное изменение аномальной фазы в топологически тривиальном режиме при $h_{\perp} \approx 3.5|\Delta|$. Причина такого поведения состоит в присутствии двух локальных минимумов на зависимости энергии джозефсоновского контакта от сверхпроводящей разности фаз. Скачок аномальной фазы появляется из-за конкуренции этих локальных минимумов при изменении зеemanовского поля. Типичные зависимости спонтанной разности фаз от геометрического угла разориентации показаны на Рис. 2.4(б) и 2.5(б). Можно видеть, что в отличие от режима сильных зеemanовских полей, типичные зависимости $\varphi_0(\chi)$ являются нелинейными в диапазоне параметров, соответствующих кроссоверу на кривых $\varphi_0(h_{\perp})$. Представленные результаты численного моделирования поведения аномальной фазы от обменного поля находятся в качественном согласии с результатами, полученными в рамках эффективной БдЖ модели (2.11).

В конце данного раздела обсудим поведение основных транспортных характеристик стационарного эффекта Джозефсона. Типичные зависимости критических токов $I_{c\pm}$ и аномального джозефсоновского тока $I_s(\varphi = 0)$ от зеemanовского поля и угла разориентации нанопроводов показаны на Рис. 2.6. Из Рис. 2.6(а) можно видеть, что при $h_{\perp} \lesssim |\Delta|$ сверхпроводящий диодный эффект в системе отсутствует $I_{c+} \approx I_{c-}$, и аномальный ток исчезающе мал. Увеличение зеemanовского поля приводит к уменьшению критических токов и к увеличению аномального тока. Результаты на Рис. 2.6(а) показывают, что в области кроссовера на кривых $\varphi_0(h_{\perp})$ в системе наблюдается сверхпроводящий диодный эффект: величина критического тока зависит от направления пропускаемого тока $I_{c+} \neq I_{c-}$. Кроме того, графики на Рис. 2.6(а) демонстрируют скачок производной $\partial I_{c\pm}/\partial h_{\perp}$ в точке топологического перехода. Дальнейшее увеличение спин-расщепляющего поля приводит к возвратному поведению кри-

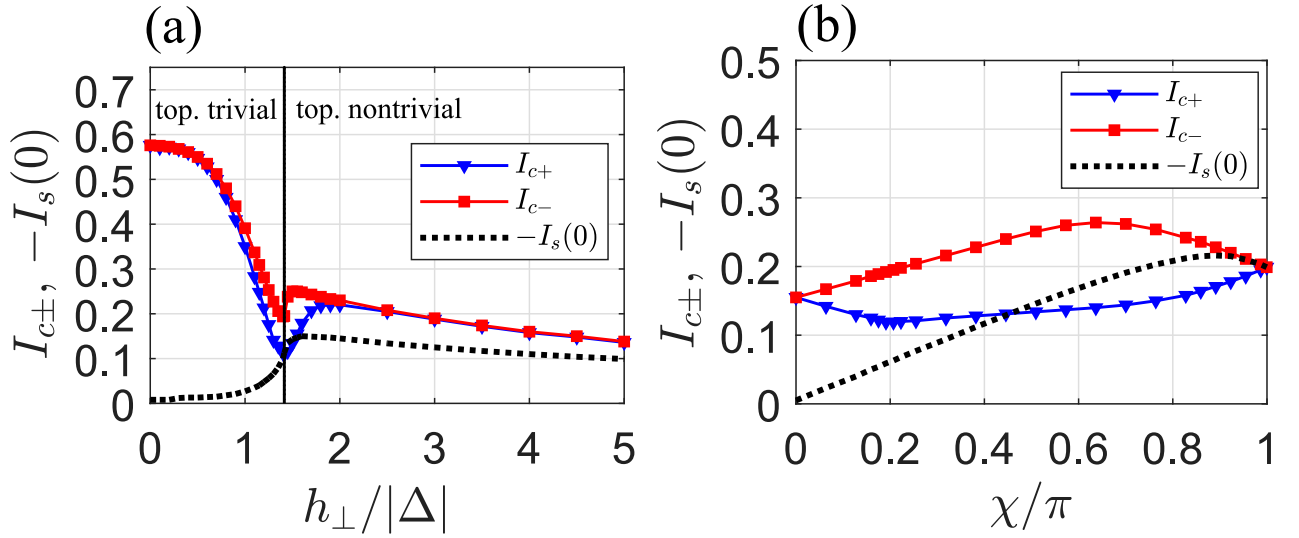


Рисунок 2.6 — Зависимости критических токов $I_{c\pm}$ и аномального тока от зеемановского расщепления (а) и угла разориентации нанопроводов χ (б) для модельного профиля спин-расщепляющего поля (2.2а). Результаты получены для $\mu = |\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода, $\chi = \pi/2$ (а), и $h_{\perp} = 1.5|\Delta|$ (б). Топологический переход происходит при $h_{\perp} = \sqrt{2}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (а)].

тических токов. В согласии с ранее известными результатами [129], упомянутое выше возвратное поведение критических токов становится менее выраженным при уменьшении угла разориентации и исчезает в пределе $\chi \rightarrow 0$. Отметим, что уравнение (2.13) и результаты численного моделирования показывают, что в пределе сильных зеемановских полей критический ток не зависит ни от угла разориентации, ни от направления пропускаемого тока $I_{c+} = I_{c-} = \mathcal{I}_-$. Сравнивая уравнение (2.13) для $h_{\perp} \gg h_c$ с зависимостями $I_{c\pm}(\chi)$, вычисленными вблизи топологического перехода [см. Рис. 2.6(б)], можно видеть, что область кроссовера на зависимостях $\varphi_0(h_{\perp})$ проявляет себя в модификации зависимостей критических токов от угла разориентации χ . Из представленного анализа поведения критических токов следует, что особенности производной на зависимости критического тока от зеемановского поля может быть использовано для установления факта топологического перехода в сетях майорановских нанопроводов.

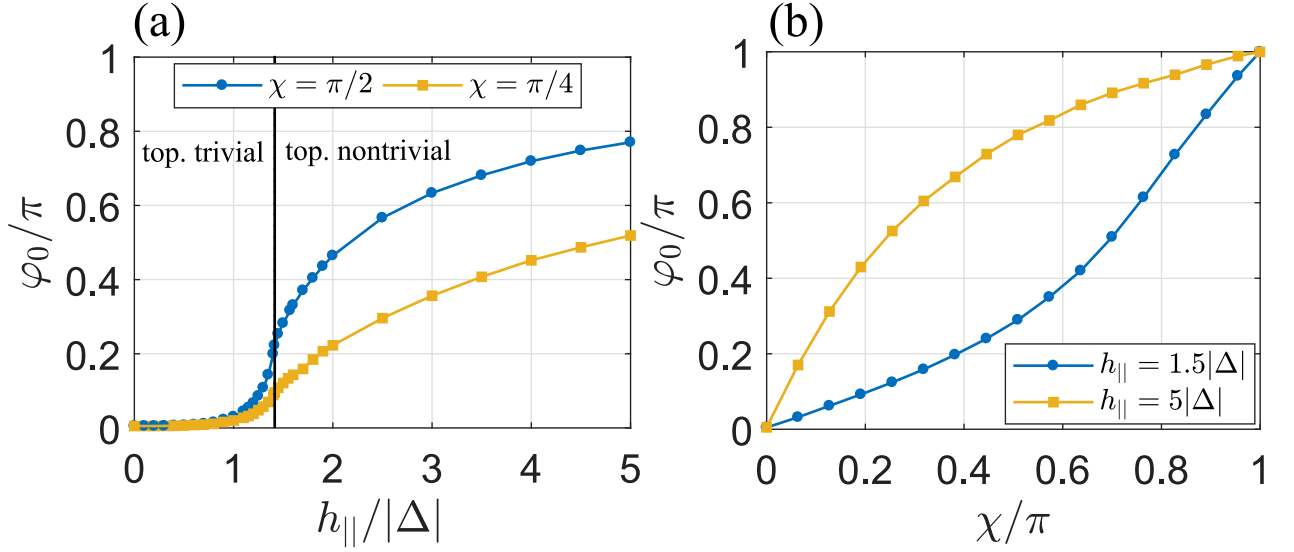


Рисунок 2.7 — Типичные зависимости $\varphi_0(h_{\parallel})$ (a) и графики $\varphi_0(\chi)$ (b) для текстурированного профиля спин-расщепляющего поля (2.26). Результаты получены для $\mu = |\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода. В системе происходит топологический переход при $h_{\parallel} = \sqrt{2}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (a)].

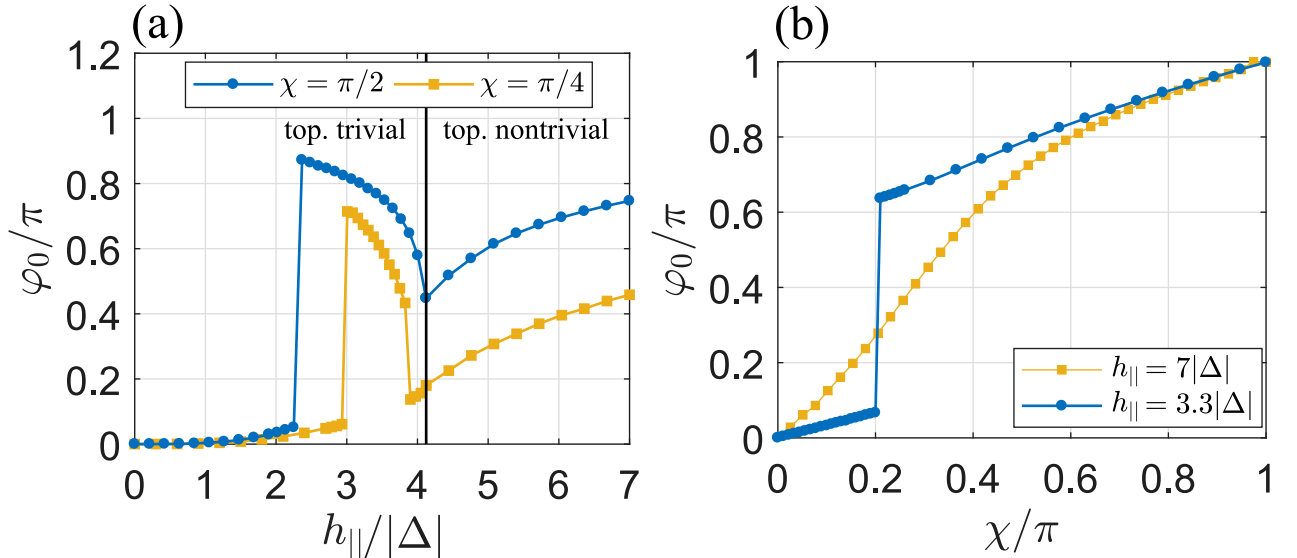


Рисунок 2.8 — Зависимости $\varphi_0(h_{\parallel})$ (a) и $\varphi_0(\chi)$ (b) для профиля спин-расщепляющего поля (2.26). Параметры системы: $\mu = 4|\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ для обеих частей нанопровода. Топологический переход происходит при $h_{\parallel} = \sqrt{17}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (a)].

2.3.2 Текстурированное спин-расщепляющее поле

В данном разделе рассматривается текстурированный профиль спин-расщепляющего поля (2.26). Типичные зависимости $\varphi_0(h_{\parallel})$ показаны на Рис. 2.7(a) и 2.8(a). Результаты, показанные на Рис. 2.7(a) и 2.8(a), были получены для $\mu = |\Delta|$ и $\mu = 4|\Delta|$, соответственно. Можно видеть, что аномальная фаза существенно отличается от угла разориентации даже для достаточно сильных спин-расщепляющих полей $h_{\parallel} \gg h_c$. Численное моделирование джозефсоновского транспорта показывает, что при выбранном диапазоне параметров вклад в сверхток от надщелевых уровней оказывается сравнимым с вкладом от подщелевых состояний квазичастиц даже для достаточно сильных спин-расщепляющих полей. Таким образом, анализ спектра энергии подщелевых квазичастиц оказывается недостаточным для корректного описания транспортных характеристик контакта. Результаты на Рис. 2.7(a) и 2.8(a) показывают ряд особенностей в поведении аномальной фазы. Заметим, что кривые $\varphi_0(h_{\parallel})$ на Рис. 2.7(a) (при $\mu = |\Delta|$) демонстрируют монотонную зависимость аномальной фазы от спин-расщепляющего поля в то время, как результаты на Рис. 2.8(a) (при $\mu = 4|\Delta|$) показывают скачки аномальной фазы в топологически тривиальной фазе. В частности, графики на Рис. 2.8(a) при $\chi = \pi/2$ показывают скачок спонтанной разности фаз при $h_{\parallel} \approx 2.2|\Delta|$ и провал вблизи топологического перехода. Появление скачков спонтанной фазы происходит из-за конкуренции двух локальных минимумов в энергии контакта в зависимости от сверхпроводящей разности фаз. Результаты, представленные на Рис. 2.8(a) при $\chi = \pi/4$ показывают даже два скачка спонтанной фазы при $h_{\parallel} \approx 3|\Delta|$ и $h_{\parallel} \approx 4|\Delta|$ в топологически тривиальной фазе. Типичные зависимости аномальной фазы от угла разориентации нанопроводов для текстурированного профиля спин-расщепляющего поля (2.26) показаны на Рис. 2.7(b) и 2.8(b). Из Рис. 2.7(b) и 2.8(b) можно видеть, что зависимости $\varphi_0(\chi)$ являются нелинейными как в топологически тривиальном, так и в нетривиальном режиме.

Типичное поведение критических токов $I_{c\pm}$ и аномального джозефсоновского тока $I_s(\varphi = 0)$ в зависимости от спин-расщепляющего поля и угла разориентации показано на Рис. 2.9. Данные результаты демонстрируют, что все ранее указанные особенности поведения критических токов такие, как скачок производной $\partial I_{c\pm}/\partial h_{\parallel}$ на топологическом переходе и сверхпроводящий

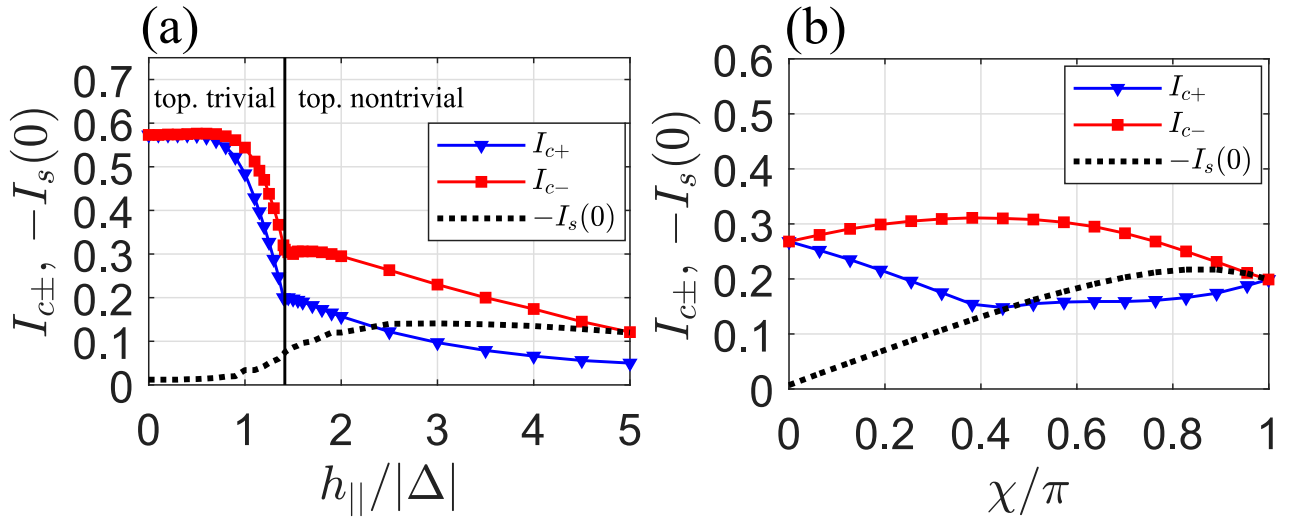


Рисунок 2.9 — Зависимости критических токов $I_{c\pm}$ и аномального джозефсоновского тока от спин-расщепляющего поля (а) и угла разориентации нанопроводов (б) для текстурированного профиля спин-расщепляющего поля (2.26). Результаты получены для $\mu = |\Delta|$ и $m\alpha^2 = 0.2|\Delta|$ в обеих частях нанопровода, $\chi = \pi/4$ (а), и $h_{||} = 1.5|\Delta|$ (б). Топологический переход в системе происходит при $h_{||} = \sqrt{2}|\Delta|$ [черная сплошная линия на панели (а)].

диодный эффект $I_{c+} \neq I_{c-}$ также имеют место в случае текстурированного спин-расщепляющего поля (2.26).

Отметим, что описанные выше особенности джозефсоновского транспорта обусловлены наличием двух вкладов в полный сверхток от подщелевых состояний квазичастиц и резонансных уровней квазичастиц. Действительно, необходимым условием для появления рассматриваемых в работе геометрических эффектов является то, что эти вклады должны быть разной величины и иметь разную зависимость по отношению к сверхпроводящей разности фаз. Важно также отметить, что для возможности реализации в системе диодного эффекта джозефсоновский переход должен быть достаточно прозрачным. Другими словами, такой контакт должен содержать высшие гармоники в токофазовом соотношении.

2.4 Выводы

Таким образом, в данной главе изучены особенности аномального эффекта Джозефсона в контактах с искривленным майорановским нанопроводом в

области слабой связи. Исследовано поведение спонтанной разности фаз сверхпроводящего параметра порядка в берегах контакта в основном состоянии при изменении величины спинового расщепления, переводящего майорановский нанопровод из топологически тривиальной в топологически нетривиальную фазу. Соответствующий анализ выполнен для двух конфигураций системы, включающих в себя искривленный нанопровод в поперечном магнитном поле, а также нанопровод с текстурированным распределением спин-расщепляющего поля, направленного параллельно и антипараллельно оси нанопровода в разных его частях. Для первой конфигурации получено аналитическое выражение для ток-фазового соотношения в квазиклассическом приближении. Для всех рассматриваемых конфигураций системы продемонстрировано возникновение в системе сверхпроводящего диодного эффекта: зависимости критического тока от направления пропускаемого тока.

Глава 3. Обратный эффект близости в гибридных структурах сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы

В данной главе изучается влияние обратного эффекта близости на зарождение сверхпроводимости в гибридных структурах сверхпроводник - ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. С помощью точных решений уравнений Горькова для гибридной структуры в несверхпроводящем состоянии выводится линеаризованное уравнение самосогласования, определяется критическая температура сверхпроводящего перехода и пространственная структура функции щели. Предложенный микроскопический подход справедлив в чистом пределе и учитывает эффекты гибридизации состояний квазичастиц в обоих слоях. Примечательно, что все рассматриваемые спин-зависимые эффекты могут быть объяснены с помощью качественного анализа зонной структуры.

Важно отметить, что область применимости полученных результатов ограничена случаем, когда плотность состояний на уровне Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя много больше плотности состояний в примыкающем слое. Тем не менее, полученные результаты применимы для широкого класса гибридных систем со спин-орбитальным взаимодействием, который включает в себя структуры сверхпроводник-полупроводник, сверхпроводник-ферромагнитный металл (изолятор) и сверхпроводник-полуметалл (полностью поляризованный по спину металл или half-metal [189; 190]). Системы сверхпроводник-полуметалл представляют особый интерес для сверхпроводящей спинтроники. Наличие полной поляризации электронов по спину в полуметалле делает такие гибридные системы удобной платформой для изучения дальнодействующего спин-триплетного джозефсоновского транспорта [191; 192] и эффекта спинового вентиля [193; 194].

Полученные результаты касательно поведения сверхпроводящей критической температуры и импульса куперовской пары находятся в качественном согласии с результатами недавних работ, в которых изучались сходные явления в трехмерных диффузных [195] и двумерных чистых [196] гибридных структурах сверхпроводник-ферромагнетик, а также в структурах, состоящих

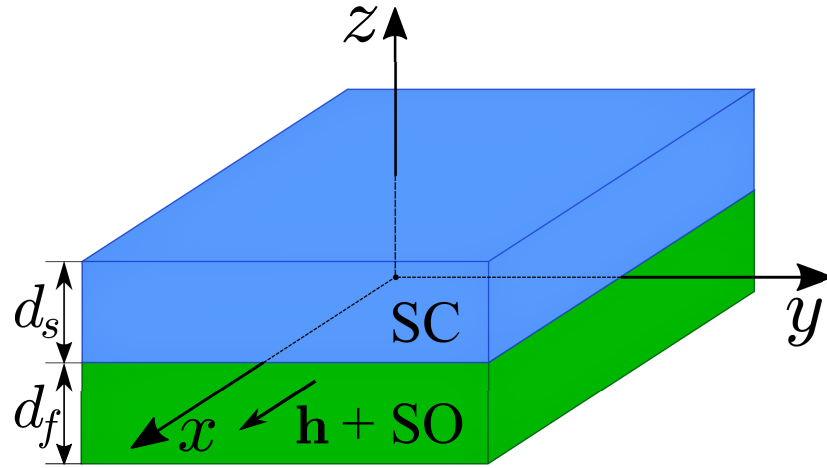


Рисунок 3.1 — Схематическое изображение сверхпроводящей пленки в контакте с материалом с обменным или зеемановским полем \mathbf{h} и спин-орбитальным (SO) взаимодействием Рашбы. Спин-орбитальное взаимодействие характеризуется единичным вектором \mathbf{n} , направленным вдоль оси Oz . Здесь d_s (d_f) - толщина сверхпроводящего (примыкающего) слоя.

из бислоя сверхпроводник-ферромагнетик на поверхности топологического изолятора [120].

3.1 Модель

Рассматриваемые системы представляют собой планарные гибридные структуры, состоящие из тонкой сверхпроводящей пленки (S) в контакте с материалом с сильным обменным или зеемановским полем и спин-орбитальным взаимодействием Рашбы (см. Рис. 3.1). Мы предполагаем, что условия чистого предела выполнены в обоих слоях. Результаты, полученные в данной главе, справедливы в области параметров $\lambda_F \ll d_s \ll \xi_s$, где d_s - толщина S слоя, λ_F - фермиевская длина волны электронов в S слое в несверхпроводящем состоянии, и ξ_s - сверхпроводящая длина когерентности при нулевой температуре. Условие $d_s \ll \xi_s$ позволяет пренебречь пространственным изменением функции щели по толщине S слоя. С другой стороны, условие $\lambda_F \ll d_s$ обеспечивает малость эффектов, связанных с размерным квантованием спектра энергии квазичастиц в сверхпроводящей пленке (см., например, работы [197–199]). Целью данной работы является анализ обратного влияния спин-зависимых взаимодействий в примыкающем слое на зарождение сверхпроводимости в системе. Поэтому для

простоты мы пренебрегаем влиянием внешнего магнитного поля на спины электронов в S слое и орбитальными эффектами магнитного поля в обоих слоях. Здесь и далее используется система единиц $k_B = \hbar = 1$, где k_B - постоянная Больцмана, и \hbar - постоянная Планка. Гамильтониан гибридной структуры имеет следующий вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3\mathbf{r} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \left[\hat{H}(\mathbf{r}) \right]_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r} \left[\Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right]. \quad (3.1)$$

Здесь ψ_{σ}^{\dagger} (ψ_{σ}) - фермионный оператор рождения (уничтожения), индексы σ , $\sigma' = \uparrow, \downarrow$ обозначают спиновые степени свободы,

$$\left[\hat{H}(\mathbf{r}) \right]_{\sigma\sigma'} = H_0(\mathbf{r}) \delta_{\sigma\sigma'} + \left[\hat{U}(\mathbf{r}) \right]_{\sigma\sigma'}, \quad (3.2a)$$

$$H_0(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \frac{1}{m(\mathbf{r})} \mathbf{p} - \mu(\mathbf{r}) + U_0 \delta(z), \quad (3.2b)$$

$\mathbf{p} = -i\nabla = (p_x, p_y, p_z)$ - оператор импульса, $m(\mathbf{r})$ - пространственный профиль эффективной массы, $\mu(\mathbf{r})$ - профиль химпотенциала, и параметр $U_0 > 0$ описывает эффекты дополнительного спин-независящего рассеяния для квазичастиц на интерфейсе между двумя материалами. Зависящая от спина часть потенциальной энергии $\hat{U}(\mathbf{r})$ отлична от нуля только в примыкающем слое

$$\hat{U}(\mathbf{r}) = \Theta(-z) [h\hat{\sigma}_x + \alpha(p_x\hat{\sigma}_y - p_y\hat{\sigma}_x)], \quad (3.3)$$

где Θ - функция Хевисайда, $\hat{\sigma}_i$ ($i = x, y, z$) - матрицы Паули в спиновом пространстве, h - обменное (или зеемановское) поле, и α - константа спин-орбитального взаимодействия. Сверхпроводящий параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ отличен от нуля только в S слое ($0 \leq z \leq d_s$). Пространственный профиль функции щели выбран следующего вида:

$$\Delta(\mathbf{r}) = |\Delta| e^{iq(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h) \mathbf{r}}, \quad (3.4)$$

В приведенных выше выражениях $q(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h)$ - импульс куперовской пары в системе центра масс в направлении, задаваемым векторным произведением нормали \mathbf{n} и единичного вектора $\mathbf{n}_h = \mathbf{h}/|\mathbf{h}|$ (см. Рис. 3.1).

Анализ особенностей зарождения сверхпроводимости проведен в рамках формализма уравнений Горькова на мацубаровские функции Грина

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{r})\check{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') , \quad (3.5a)$$

$$\check{G}^{-1}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} i\omega_n - \hat{H}(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & i\omega_n + \hat{\sigma}_y \hat{H}^*(\mathbf{r}) \hat{\sigma}_y \end{bmatrix} . \quad (3.5b)$$

Здесь $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$ - мацубаровская частота, T - температура, и n - целое число. Матрица $\check{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ имеет следующую блочную структуру

$$\check{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{bmatrix} \hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \hat{F}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\ \hat{F}^\dagger(\mathbf{r},\mathbf{r}') & \hat{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

и функция щели определяется из уравнения самосогласования

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = \frac{VT}{2} \sum_{|\omega_n| < \Omega} \text{Tr} \left[\hat{F}^\dagger(\mathbf{r},\mathbf{r}) \right] , \quad (3.7)$$

где V - величина эффективного электрон-электронного взаимодействия, и Ω - частота обрезания в теории БКШ.

Для вывода уравнения на критическую температуру сверхпроводящего перехода мы вычисляем гриновские функции (3.5) в первом порядке по сверхпроводящему параметру порядка для кусочно постоянных профилей потенциала конфайнмента и эффективной массы $\mu(z) = \mu_s$, $m(z) = m_s$ при $0 < z < d_s$, и $\mu(z) = \mu_f$, $m(z) = m_f$ при $-d_f < z < 0$. В следующем разделе представлены аналитические результаты. Детали вывода основных соотношений, включающие в себя определения гриновских функций, вывод нормальной функции Грина несверхпроводящей системы и линеаризованного уравнения самосогласования, даны в Приложении В.

3.2 Линеаризованное уравнение самосогласования

В случае пространственно однородного сверхпроводящего параметра порядка линеаризованное уравнение самосогласования имеет следующий вид:

$$\ln \left(\frac{T}{T_{c0}} \right) = \pi T \sum_{\omega_n > 0} \left[-\frac{2}{\omega_n} + \text{Re} \sum_{\eta, \eta' = \pm} \left\langle \frac{\delta_{\eta\eta'} w_{intra} + (1 - \delta_{\eta\eta'}) w_{inter}}{\omega_n + i\rho_{\eta\eta'}} \right\rangle_{\mathbf{k}} \right] . \quad (3.8)$$

Здесь T_{c0} - температура сверхпроводящего перехода объемного сверхпроводника, η и η' - индексы геликоидальных спиновых подзон, $\langle \dots \rangle_{\mathbf{k}}$ обозначает усреднение по Ферми поверхности S слоя в несверхпроводящем состоянии¹

$$\langle X(\mathbf{k}) \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 du \int_0^{2\pi} d\varphi X(\mathbf{k}) , \quad (3.9)$$

$\mathbf{k} = (k_{\parallel} \cos \varphi, k_{\parallel} \sin \varphi, k_F u)$, $k_{\parallel} = k_F \sqrt{1 - u^2}$, k_F (v_F) - импульс (скорость) Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя. Распаривающие факторы

$$\rho_{\eta\eta'} = \frac{v_F}{2d_s} u \operatorname{tg}(\bar{\phi}_{\eta} - \phi_{\eta'}) , \quad (3.10)$$

описывают подавление межзонных (ρ_{+-} , ρ_{-+}) и внутризонных (ρ_{++} , ρ_{--}) спин-синглетных сверхпроводящих корреляций в S слое [200]. Информация об эффектах гибридизации между электронными состояниями в обоих слоях содержится в фазах рассеяния

$$\operatorname{tg}(\phi_{\eta}) = \frac{1}{Z + (m_s k_{f\eta} / m_f k_s) \operatorname{ctg}(k_{f\eta} d_f)} , \quad (3.11)$$

которые содержат информацию о спектральных свойствах обоих слоев

$$\frac{k_{f\eta}^2}{2m_f} = i\omega_n + \mu_{f\perp} - \eta \sqrt{(h - \alpha k_y)^2 + (\alpha k_x)^2} , \quad (3.12a)$$

$$\frac{k_s^2}{2m_s} = i\omega_n + \mu_{s\perp} \quad (3.12b)$$

а также о проникновении электронной волновой функции в ферромагнетик. Здесь μ_s , m_s (μ_f , m_f) - расстояние от химпотенциала до дна зоны и эффективная масса для электронов в сверхпроводнике (ферромагнетике), соответственно, $\mu_{s(f)\perp} = \mu_{s(f)} - \mathbf{k}_{\parallel}^2 / 2m_{s(f)}$, и $Z = 2m_s U_0 / k_s$ - параметр силы барьера. Фазы рассеяния для дырок $\bar{\phi}_{\eta}$ можно получить из уравнения (3.11) путем замены

$$\bar{\phi}_{\eta}(\omega_n, h) = \phi_{\eta}(-\omega_n, -h) . \quad (3.13)$$

Весовые функции

$$w_{inter} = \cos^2(\beta) , \quad (3.14a)$$

$$w_{intra} = 1 - w_{inter} \quad (3.14b)$$

¹В рамках данной работы рассмотрен случай сферической Ферми поверхности.

с $\beta = (\beta_+ + \beta_-)/2$ и $\text{tg}(\beta_{\pm}) = \alpha k_x / (h \pm \alpha k_y)$ определяют распределение доли межзонных (внутризонных) спин-синглетных куперовских пар на поверхности Ферми.

Полезно сравнить полученное уравнение на критическую температуру сверхпроводящего перехода с результатами работы [155]. Для этой цели необходимо исключить из рассмотрения спин-орбитальное взаимодействие и пренебречь зависимостью фаз рассеяния от мацубаровской частоты, что приводит к следующим соотношениям:

$$w_{inter} = 1 , \quad (3.15a)$$

$$\rho_{+-} = -\rho_{-+} . \quad (3.15b)$$

Используя уравнения (3.15), уравнение самосогласования (3.8) может быть переписано в форме

$$\ln \left(\frac{T}{T_{c0}} \right) = -\pi T \sum_{\omega_n} \int_0^1 du \frac{\rho^2(u)}{|\omega_n| [\omega_n^2 + \rho^2(u)]} , \quad (3.16a)$$

$$\rho(u) = \frac{v_F}{2d_s} u \text{tg} [\phi_+(u) - \phi_-(u)] , \quad (3.16b)$$

совпадающей с уравнением (33) в [155].

В случае пространственно неоднородного сверхпроводящего состояния (3.4) с $q \neq 0$ уравнение самосогласования имеет вид (3.8) со следующими заменами

$$\bar{\phi}_{\eta}(k_x, k_y) \rightarrow \bar{\phi}_{\eta}(k_x, k_y - q/2) , \quad (3.17a)$$

$$\phi_{\eta}(k_x, k_y) \rightarrow \phi_{\eta}(k_x, k_y + q/2) , \quad (3.17b)$$

$$\beta_+(k_x, k_y) \rightarrow \beta_+(k_x, k_y - q/2) , \quad (3.17b)$$

$$\beta_-(k_x, k_y) \rightarrow \beta_-(k_x, k_y + q/2) , \quad (3.17\Gamma)$$

и модифицированными распаривающими факторами

$$\begin{aligned} \rho_{\eta\eta'}(q) &= \frac{qv_F}{2} \sin(\varphi) \sqrt{1 - u^2} \\ &+ \frac{v_F}{2d_s} u \text{tg} [\bar{\phi}_{\eta}(q) - \phi_{\eta'}(q)] . \end{aligned} \quad (3.18)$$

В присутствии спин-расщепляющего поля и спин-орбитального взаимодействия мы вычисляем как температуру сверхпроводящего перехода

$$T_c = \max_q [T_c(q)] \quad (3.19)$$

так и импульс куперовской пары $q = Q$, соответствующий максимальной T_c .

Важно отметить, что анализ зависимостей $Q(\alpha, h)$, полученных из результатов численного моделирования, содержит важную информацию о структуре соответствующего феноменологического описания. В частности, такого рода анализ может быть использован для обоснования инварианта Лифшица в плотности свободной энергии Гинзбурга-Ландау и указать диапазон параметров, для которого такое описание справедливо. Идея состоит в следующем [201]. Подставляя профиль сверхпроводящего параметра порядка (3.4) в выражение для плотности свободной энергии с инвариантом Лифшица

$$f(\mathbf{r}) = -a \left(\tilde{T}_c - T \right) |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4 + \gamma |\mathbf{p}\Delta|^2 + \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h) [\Delta^*(\mathbf{p}\Delta) + c.c.] . \quad (3.20)$$

мы получаем сдвиг критической температуры сверхпроводящего перехода

$$T_c(q) = \tilde{T}_c - \frac{\gamma}{a} \left(q + \frac{\epsilon}{\gamma} \right)^2 + \frac{\epsilon^2}{a\gamma} . \quad (3.21)$$

Здесь a , β , γ - стандартные коэффициенты теории Гинзбурга-Ландау, и $\tilde{T}_c = T_c(q = 0)$. В результате, импульс куперовской пары, соответствующий максимальной критической температуре Q пропорционален инварианту Лифшица, а сдвиг T_c оказывается квадратичным по Q

$$\epsilon = -\gamma Q , \quad (3.22a)$$

$$\delta T_c(Q) \equiv T_c(Q) - T_c(0) = \frac{\gamma}{a} Q^2 . \quad (3.22b)$$

Возможные отклонения зависимости $\delta T_c(Q)$, полученной в рамках микроскопической теории, от поведения (3.22b), свидетельствует о нарушении исходных предположений (3.20) и, таким образом, корректное феноменологическое описание обратного эффекта близости должно содержать высшие по градиентам слагаемые в функционале Гинзбурга-Ландау.

3.3 Влияние спин расщепляющего поля и спин-орбитального взаимодействия в ферромагнетике на свойства сверхпроводящего слоя. Качественная картина

В данном разделе представлены качественные аргументы, проясняющие совместный эффект спин-расщепляющего поля и спин-орбитального взаимодействия на критическую температуру сверхпроводящего перехода и импульс куперовской пары. Достаточно простые объяснения спин-зависимых эффектов, рассматриваемых в данной работе, следуют из того обстоятельства, что в условиях эффекта близости в сверхпроводящем слое наводится спин-расщепляющее поле и спин-орбитальное взаимодействие. Схематичные изображения поверхностей Ферми для двумерных спин-отщепленных подзон (движение электронов поперек плоскости слоя заковано) показаны на Рис. 3.2.

Для простоты сперва обсудим поведение T_c для пространственно-однородного сверхпроводящего состояния. Из Рис. 3.2(а) можно видеть, что в отсутствие спин-орбитального взаимодействия спин-синглетные куперовские пары формируются электронами из разных спиновых подзон (межзонные сверхпроводящие корреляции). Данный режим соответствует $w_{inter} = 1$ в уравнении (3.8). Зависимость фаз рассеяния электронов от спина приводит к достаточно сильному подавлению T_c при увеличении h и сопровождается появлением спин-триплетных сверхпроводящих корреляций нечетных по мацубаровской частоте. В обратном предельном случае, для $h = 0$, $\alpha \neq 0$ спин-синглетные куперовские пары образуют электроны из одинаковых спиновых подзон (внутризонные пары) (см. Рис. 3.2(с)), а соответствующие фазы рассеяния от спиновой степени свободы не зависят. В этом случае, эффект спин-орбитального взаимодействия состоит только в сдвиге химпотенциала примыкающего слоя μ_f на величину $m_f \alpha^2$. Для типичной экспериментальной ситуации $m_f \alpha^2 \ll \mu_s$, и, таким образом, отдельный эффект спин-орбитального взаимодействия на T_c пренебрежимо мал.

Для конечных значений h и α в системе присутствуют как внутризонные, так и межзонные спин-синглетные куперовские пары. Их относительные доли

на Ферми поверхности S слоя

$$W_{inter} = \langle w_{inter} \rangle_{\mathbf{k}} , \quad (3.23a)$$

$$W_{intra} = 1 - W_{inter} . \quad (3.23b)$$

определяются отношением $h/\alpha k_F$. Таким образом, в пределе $h \gg \alpha k_F$ ($h \ll \alpha k_F$) спин-синглетные куперовские пары в системе преимущественно межзонные (внутризонные). Из качественного анализа уравнений (3.10), (3.11), (3.12a), и (3.13) можно видеть, что обменное (или зеемановское) поле разрушает как внутризонные, так и межзонные пары. Однако, сильнее подавляются межзонные сверхпроводящие корреляции. Исходя из этого наблюдения, можно ожидать, что спин-орбитальное взаимодействие должно частично компенсировать распаривающий эффект обменного (или зеемановского) поля $T_c(\alpha k_F \gg h, h) \geq T_c(\alpha = 0, h)$. Довольно простое выражение, описывающее поведение $T_c(\alpha k_F, h)$ может быть получено из уравнения (3.8) с помощью расщепления средних по поверхности Ферми

$$\left\langle \frac{w_{intra}}{\omega_n + i\rho_{\eta\eta}} \right\rangle_{\mathbf{k}} \approx W_{intra} \left\langle \frac{1}{\omega_n + i\rho_{\eta\eta}} \right\rangle_{\mathbf{k}} , \quad (3.24a)$$

$$\left\langle \frac{w_{inter}}{\omega_n + i\rho_{\eta\bar{\eta}}} \right\rangle_{\mathbf{k}} \approx W_{inter} \left\langle \frac{1}{\omega_n + i\rho_{\eta\bar{\eta}}} \right\rangle_{\mathbf{k}} , \quad (3.24b)$$

и пренебрегая зависимостью фаз рассеяния от энергии спин-орбитального взаимодействия при изменении αk_F от нуля до $\alpha k_F \gg h$. Здесь $\bar{\eta} = -\eta$. В результате, мы получаем следующее выражения для критической температуры

$$\frac{T_c(\alpha k_F, h)}{T_{c0}} = \left[\frac{T_c(\alpha = 0, h)}{T_{c0}} \right]^{W_{inter}} \left[\frac{T_c(\alpha k_F \gg h, h)}{T_{c0}} \right]^{W_{intra}} , \quad (3.25)$$

которое находится в хорошем качественном согласии с результатами численного моделирования.

Обсудим теперь поведение импульса куперовских пар в системе центра масс вблизи сверхпроводящей критической температуры в зависимости от зонных параметров примыкающего слоя. Приведенное в данном разделе обсуждение касается только внутризонных сверхпроводящих корреляций в то время, как влияние межзонных корреляций на пространственную структуру сверхпроводящего параметра порядка должно проявляться при низких температурах.

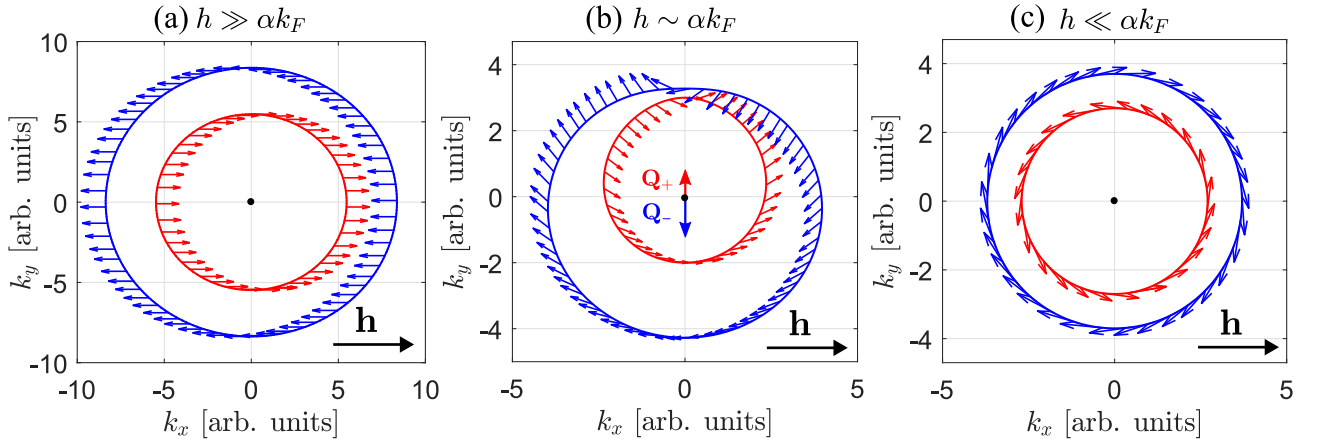


Рисунок 3.2 — Схематичное изображение двумерных поверхностей Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя (движение электронов поперек плоскости слоя заковано). Панели (a), (b), (c) соответствуют предельным случаям $h \gg \alpha k_F$, $h \sim \alpha k_F$, $h \ll \alpha k_F$, соответственно. Стрелками показана спиновая поляризация электронных состояний. Здесь k_F - импульс Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя. Векторы \mathbf{Q}_η с $\eta = \pm$ на панели (b) показывают разницу импульса куперовских пар в разных спиновых подзонах.

Во-первых, из Рис. 3.2(b) можно видеть, что при $h \sim \alpha k_F$ для каждой геликоидальной подзоны с $\eta = \pm$ может быть выгодно образование неоднородного сверхпроводящего состояния с конечным импульсом куперовской пары \mathbf{Q}_η в противоположных направлениях $\eta(\mathbf{n} \times \mathbf{n}_h)$. В свою очередь, полный импульс появляется из-за конкуренции между двумя геликоидальными подзонами, и разница плотности состояний между геликоидальными подзонами на уровне Ферми в нормальном состоянии S слоя необходима, чтобы получить отличный от нуля ответ для импульса [153]. В частности, из-за этого обстоятельства можно ожидать, что при заданных h и αk_F импульс пары должен существенно зависеть от значения химпотенциала в примыкающем слое μ_f . Во-вторых, преобразованию $h \rightarrow -h$ или $\alpha \rightarrow -\alpha$ соответствует замена $k_y \rightarrow -k_y$ на Рис. 3.2. Таким образом, мы получаем, что результирующий импульс пары должен удовлетворять следующим симметричным соотношениям:

$$Q(\alpha, h) = -Q(-\alpha, h) , \quad (3.26a)$$

$$Q(\alpha, h) = -Q(\alpha, -h) . \quad (3.26b)$$

В-третьих, из Рис. 3.2(a) и 3.2(c) можно видеть, что импульс пары Q должен исчезать в двух предельных случаях $h \gg \alpha k_F$ и $h \ll \alpha k_F$. Из данного

обстоятельства следует, что зависимости $Q(h)$ и $Q(\alpha k_F)$ должны быть иметь возвратный характер (можно ожидать максимум $\max |Q|$ при $h \sim \alpha k_F$).

3.4 Результаты численного моделирования

В данном разделе представлены результаты численного моделирования. Возникновение спин-зависимых эффектов, рассматриваемых в данной работе, проиллюстрировано для набора параметров $m_f/m_s = 1$ и $U_0 = 0$. Влияние примыкающего слоя на сверхпроводящую критическую температуру, естественно, уменьшается при увеличении толщины сверхпроводящего слоя и/или усилении не зависящего от спина рассеяния для квазичастиц на интерфейсе между двумя материалами.

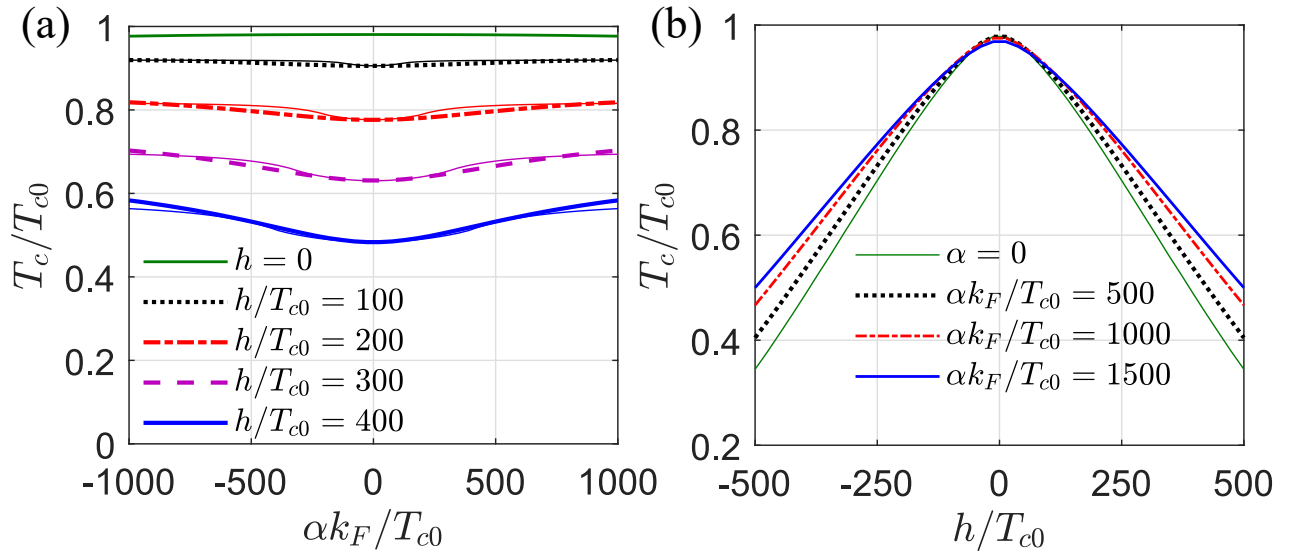


Рисунок 3.3 — (а) Сверхпроводящая критическая температура T_c в зависимости от энергии спин-орбитального взаимодействия αk_F для $h = 0, 100, 200, 300, 400$. Тонкими сплошными линиями показаны результаты уравнения (3.25). (б) Зависимости импульса куперовских пар $Q(h)$ для $\alpha k_F/T_{c0} = 50, 100, 150, 200$. Результаты получены для набора параметров: $\mu_s/T_{c0} = 10^4$, $\mu_f = 0$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.01$, и $d_f = 5d_s$. Здесь v_F - скорость Ферми в нормальном состоянии сверхпроводника, и T_{c0} соответствует критической температуре объемного сверхпроводника.

Типичное поведение сверхпроводящей критической температуры в зависимости от спин-зависимых полей в примыкающем слое показано на Рис. 3.3.

Результаты получены для следующего набора параметров: $\mu_s/T_{c0} = 10^4$, $\mu_f = 0$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.01$, и $d_f = 5d_s$. Заметим, что для выбранного значения μ_f результаты при слабых ($h \leq T_{c0}$) и сильных ($h \gg T_{c0}$) спин-расщепляющих полях относятся к гибридным структурам сверхпроводник/полупроводник и сверхпроводник/полностью поляризованный по спину металл, соответственно. Серия графиков $T_c(\alpha k_F)$ для разных значений спин-расщепляющего поля h показаны на Рис. 3.3(a). Можно видеть, что в отсутствии обменного поля спин-орбитальное взаимодействие практически не влияет на критическую температуру. Увеличение h от нуля приводит к достаточно сильному подавлению T_c , которое частично компенсируется за счет спин-орбитального взаимодействия. Сплошные линии на Рис. 3.3(a) соответствуют результатам формулы (3.25). Типичные графики $T_c(h)$ на Рис. 3.3(b), полученные для ряда значений энергии спин-орбитального взаимодействия, показывают уменьшение наклона зависимостей $T_c(h)$ при увеличении αk_F . Как было объяснено в предыдущем разделе, такой компенсационный эффект происходит из-за появления внутризонных спин-синглетных куперовских пар в сверхпроводящем слое, для которых распаривающий эффект обменного поля оказывается слабее. Заметим также, что для обеих панелей на Рис. 3.3 мы получаем, что $|Q|v_F/2T_{c0} < 0.05$, и повышение сверхпроводящей критической температуры T_c для модулированного сверхпроводящего состояния $\delta T_c(Q)/T_{c0} < 10^{-3}$.

Интересно отметить, что качественные аргументы касательно поведения T_c также справедливы для тонких сверхпроводящих пленок с наведенным спин-орбитальным взаимодействием, находящихся в сильном продольном магнитном поле. В этой связи, наши результаты также проясняют ослабление парамагнитного эффекта для электронов в тонкой сверхпроводящей пленке, находящейся в контакте со слоем тяжелого металла с сильным спин-орбитальным взаимодействием. Заметим, что проявление данного эффекта в контексте сверхпроводящего эффекта близости в гибридных структурах полупроводник-сверхпроводник было проанализировано в недавних экспериментах [202], в которых было показано, что нанопровода InSb/Al/Pt могут оставаться в сверхпроводящем состоянии в магнитных полях до 7 Т.

Перейдем теперь к обсуждению поведения импульса куперовской пары в системе центра масс. Результирующий импульс Q , действительно, оказывается чувствительным к положению химпотенциала в примыкающем слое. Типичные зависимости $Q(\mu_f)$ для ряда значений h показаны на Рис. 3.4(a).

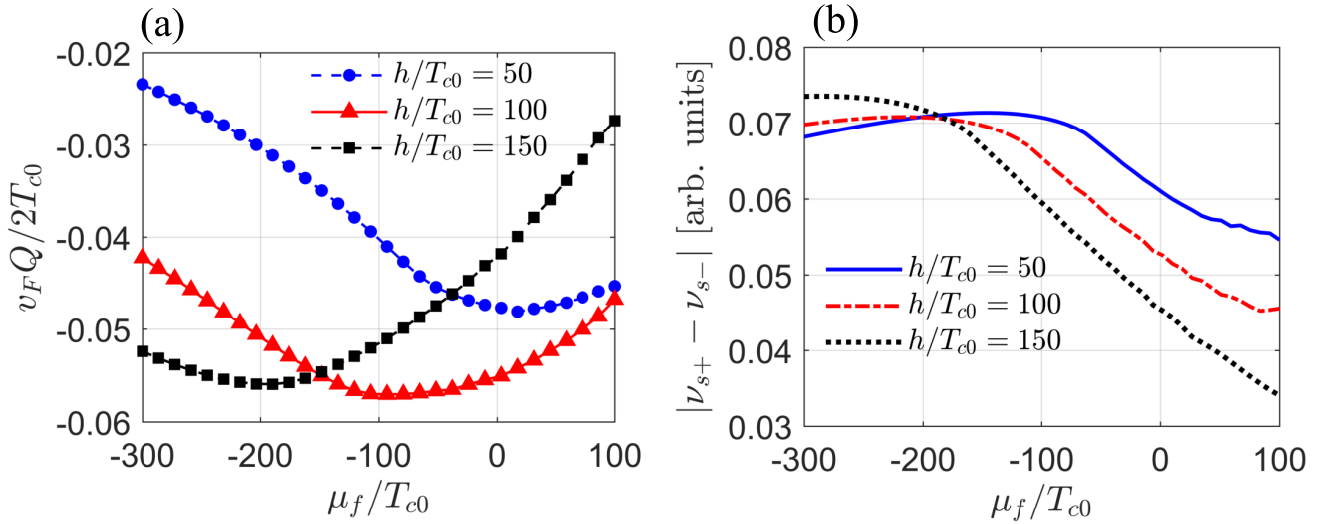


Рисунок 3.4 — (а) Импульс куперовской пары Q как функция химпотенциала в примыкающем слое μ_f для нескольких значений спин-расщепляющего поля $h/T_{c0} = 50, 100, 150$. (б) Модуль разности плотностей электронных состояний в геликоидальных подзонах на уровне Ферми S слоя в нормальном состоянии $\nu_{s\eta}$ ($\eta = \pm$) в зависимости от μ_f для $h/T_{c0} = 50, 100, 150$. Результаты получены для набора параметров $\mu_s/T_{c0} = 10^3$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.05$, $d_f = 4d_s$ и $\alpha k_F/T_{c0} = 200$.

Соответствующие результаты получены для набора параметров $\mu_s/T_{c0} = 10^3$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.05$, $d_f = 4d_s$ и $\alpha k_F/T_{c0} = 200$. Диапазон параметров $|\mu_f| < h$ относится к гетероструктурам сверхпроводник/металл с полной спиновой поляризацией, а случай $\mu_f < -h$ ($\mu_f > h$) соответствует структуре сверхпроводник/ферромагнитный изолятор (ферромагнитный металл). Можно видеть, что при заданном обменном поле зависимости $Q(\mu_f)$ являются немонотонными, и $|Q|$ достигает максимального значения, когда нижняя спиновая подзона ферромагнетика пересекает уровень Ферми, а дно верхней спиновой подзоны располагается выше уровня Ферми. Такое поведение импульса отражает конкуренцию спин-отщепленных геликоидальных подзон, для которых выгодно неоднородное сверхпроводящее состояние с конечным импульсом куперовской пары разной величины и в противоположных направлениях. Ненулевая разница плотностей электронных состояний в спин-отщепленных геликоидальных подзонах на уровне Ферми S слоя в нормальном состоянии $\nu_{s\eta}$ ($\eta = \pm$) необходима, чтобы получить ненулевой ответ. В рамках теоретического подхода, использованного в данной работе, можно показать, что эта разность пропорциональна среднему по поверхности Ферми от следующего выражения:

$$|\delta\nu_s| \equiv |\nu_{s+} - \nu_{s-}| \propto \left\langle \frac{\sin(2\phi_+) - \sin(2\phi_-)}{k_z d_s} \right\rangle_{\mathbf{k}}. \quad (3.27)$$

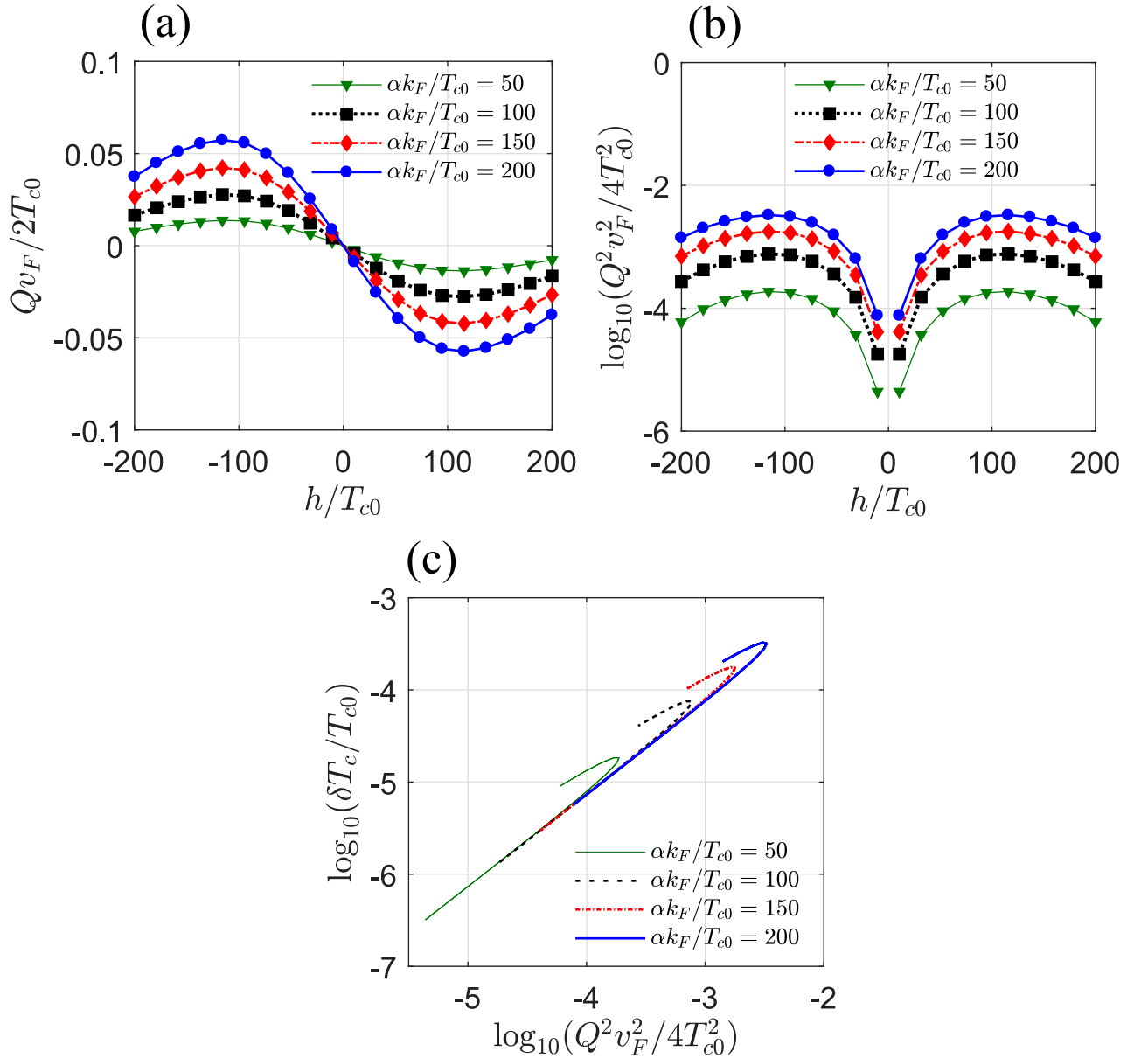


Рисунок 3.5 — Панели (a) и (b) показывают зависимости импульса куперовских пар Q и $\log_{10}(Q^2)$ от величины спин-расщепляющего поля h в примыкающем слое для нескольких значений энергии спин-орбитального взаимодействия $\alpha k_F/T_{c0} = 50, 100, 150, 200$. (c) Графики $\delta T_c(Q^2)$ в двойном логарифмическом масштабе. Результаты получены для набора параметров $\mu_s/T_{c0} = 10^3$, $\mu_f/T_{c0} = -120$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.05$ и $d_f = 4d_s$. Здесь $\delta T_c(Q) \equiv T_c(Q) - T_c(0)$.

Типичное поведение $|\nu_{s+} - \nu_{s-}|$ в зависимости от μ_f показано на Рис. 3.4(b). Из полученных результатов можно видеть, что немонотонные зависимости $|\delta\nu_s(\mu_f)|$, отслеживающие особенности плотности состояний в ферромагнетике, обеспечивают качественное объяснение немонотонного поведения $Q(\mu_f)$, показанного на Рис. 3.4(a).

Зависимости импульса куперовских пар от величины спин-расщепляющего поля в примыкающем слое показаны на Рис. 3.5(a). Представленные результаты получены для набора параметров $\mu_s/T_{c0} = 10^3$, $\mu_f/T_{c0} = -120$, $d_s T_{c0}/v_F = 0.05$ и $d_f = 4d_s$. Из Рис. 3.5(a) можно видеть, что в случае слабых спин-расщепляющих полей h импульс пар является линейной функцией h , и наклон зависимостей $Q(h)$ является линейной функцией константы спин-орбитального взаимодействия. Такое поведение согласуется с наличием инварианта Лифшица $\propto \alpha h$ в плотности свободной энергии Гинзбурга-Ландау. В согласии с качественными аргументами, представленными в разделе 3.3, зависимости $Q(h)$ демонстрируют возвратное поведение, и максимум $\max_h |Q(h)|$ сдвигается в сторону более сильных спин-расщепляющих полей при увеличении энергии спин-орбитального взаимодействия. Панели (b) и (c) на Рис. 3.5 показывают соответствующие зависимости $\log_{10}[Q^2(h)]$ и $\delta T_c(Q^2)$ в двойном логарифмическом масштабе для выбранного диапазона обменных полей $h/T_{c0} \in [-200, 200]$. Согласно уравнению (3.22), для функционала Гинзбурга-Ландау (3.20) $\log_{10}[\delta T_c(Q)]$ должна быть линейной функцией $\log_{10}(Q^2)$. Графики на Рис. 3.5(b) и 3.5(c) показывают, что сдвиг критической температуры для пространственно-неоднородного сверхпроводящего состояния, действительно, квадратичен по Q в случае малых h и отклоняется от квадратичной зависимости в случае достаточно сильных обменных полей h . Таким образом, результаты, представленные на Рис. 3.5(a) и 3.5(c) обеспечивают микроскопическое обоснование феноменологического описания (3.20), а также указывают на диапазон обменных полей в примыкающем слое, для которых такое описание справедливо. Наши численные расчеты также указывают на возможность появления в системе невзаимных транспортных свойств. В частности, для достаточно сильных спин-расщепляющих полей h мы наблюдаем появление антисимметричной компоненты функции $T_c(Q + q)$ как функции q , что указывает на возможность появления в системе сверхпроводящего диодного эффекта, а именно анизотропии критического тока (см., например, [116; 117]).

Заметим также, что в диапазоне параметров, рассмотренных в данной работе, увеличение сверхпроводящей критической температуры для модулированного сверхпроводящего состояния $\delta T_c/T_{c0} < 10^{-3}$. В этой связи, в присутствии обменного поля и спин-орбитального взаимодействия, невзаимные транспортные свойства должны проявляться при пределе низких температурах, анализ которого выходит за рамки данной работы. Тем не менее, выполненные расчеты указывают на то, что усиление невзаимных эффектов возможно при выполнении следующих условий. Во-первых, ферромагнетик должен иметь достаточно сильное спиновое расщепление, что является типичной ситуацией в случае систем сверхпроводник/полностью поляризованный по спину металл. Во-вторых, требуется оптимальное значение энергии спин-орбитального взаимодействия $\alpha k_F \sim \hbar$.

3.5 Выводы

Таким образом, в данной главе изучены особенности обратного эффекта близости в планарных гибридных структурах, состоящих из тонкой сверхпроводящей пленки в контакте с материалом с сильным обменным (или зеемановским) полем и спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие приводит к частичной компенсации распаривающего эффекта обменного поля. Причина данного поведения состоит в возникновении внутризонных сверхпроводящих корреляций в сверхпроводнике, для которых эффект обменного поля становится слабее. Продемонстрировано, что спин-орбитальное взаимодействие стабилизирует неоднородные сверхпроводящие состояния с конечным импульсом куперовских пар в системе центра масс, исследовано поведение импульса пары в зависимости от параметров гибридной структуры. Полученные результаты представляют собой микроскопическое обоснование теории типа Гинзбурга-Ландау с инвариантом Лифшица для широкого класса сверхпроводящих гибридных систем, а также указывают на область применимости соответствующих феноменологических моделей.

Заключение

Таким образом, в настоящей диссертационной работе получены следующие **основные результаты**.

1. Показано, что конкуренция нормального и андреевского отражения в полупроводниковых нанопроводах, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, приводит к появлению квазичастичных мод волноводного типа. Продемонстрировано, что наличие аккумуляционного слоя для квазичастиц вблизи интерфейса полупроводник/сверхпроводник может приводить к возвратному поведению щели в спектре возбуждений при изменении внешнего магнитного потока в пределах заданного вихревого состояния.
2. Для полупроводниковых нанопроводов, полностью покрытых сверхпроводящей оболочкой, изучены эффекты спин-орбитального взаимодействия Рашбы, вызванного радиальными электрическими полями на интерфейсе. Установлен критерий появления майорановских мод в таких системах, получено аналитическое выражение для волновой функции этих мод, определен их пространственный масштаб.
3. Изучены особенности джозефсоновского транспорта в контактах с искривленным майорановским нанопроводом в области слабой связи. Исследовано поведение спонтанной разности фаз в берегах контакта в основном состоянии при изменении спин-расщепляющего поля, переводящего нанопровод из топологически тривиальной в топологически нетривиальную фазу. Продемонстрировано возникновение в таких контактах сверхпроводящего диодного эффекта: зависимости критического тока от направления пропускаемого тока.
4. Исследованы особенности обратного эффекта близости в планарных гибридных структурах, состоящих из тонкой сверхпроводящей пленки в контакте с материалом с сильным обменным полем и спин-орбитальным взаимодействием Рашбы. Показано, что спин-орбитальное взаимодействие частично компенсирует распаривающий эффект обменного поля и стабилизирует неоднородные сверхпроводящие состояния с конечным импульсом куперовских пар в системе центра масс. Рассчитаны зависимости импульса пары от параметров гибридной структуры.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю А.С. Мельникову за постоянное внимание, терпение, неизменный интерес и поддержку в работе, а также всем сотрудникам ИФМ РАН, совместная работа и общение с которыми помогли прояснить многие вопросы работы. Особенно хотелось бы выразить благодарность:

- А.А. Беспалову, С.В. Шарову, А.В. Самохвалову, В.В. Курину — за постоянный интерес и обсуждение вопросов диссертационной работы;
- И.А. Шерешевскому — за неоценимую помощь и поддержку в численных счетах;

Автор глубоко признателен своим соавторам А.С. Мельникову, И.М. Хаймовичу (Nordita, Stockholm University and KTH Royal Institute of Technology), А.Г. Кутлину (The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics), С.В. Миронову, А.В. Самохвалову и А.И. Буздину (University Bordeaux) за совместную продуктивную работу, многочисленные обсуждения при постановке и решении задачи помощь в критическом осмыслении результатов.

Автор считает своим долгом поблагодарить семью и близких за понимание и поддержку во время работы над диссертацией

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. *Kopasov, A. A.* Multiple topological transitions driven by the interplay of normal scattering and Andreev scattering / A. A. Kopasov, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2020. — Vol. 101. — P. 054515-1-054515—9.
- A2. *Kopasov, A. A.* Influence of the Accumulation Layer on the Spectral Properties of Full-Shell Majorana Nanowires / A. A. Kopasov, A. S. Mel'nikov // Phys. Solid State. — 2020. — Vol. 62. — P. 1592—1597.
- A3. *Kopasov, A. A.* Geometry controlled superconducting diode and anomalous Josephson effect triggered by the topological phase transition in curved proximitized nanowires / A. A. Kopasov, A. G. Kutlin, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2021. — Vol. 103. — P. 144520-1-144520—13.
- A4. *Kopasov, A. A.* Nucleation of superconductivity in clean superconductor-ferromagnet hybrid structures with Rashba spin-orbit interaction / A. A. Kopasov, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2022. — Vol. 105. — P. 214508-1-214508—10.
- A5. Spontaneous Currents and Topological Protected States in Superconducting Hybrid Structures with the Spin-Orbit Coupling (Brief Review) / A. V. Samokhvalov [et al.] // JETP Letters. — 2021. — Vol. 113. — P. 34—46.
- A6. *Копасов, А. А.* Состояния Кароли - де Жена - Матрикона в полупроводниковых проводах с наведенной сверхпроводимостью / А. А. Копасов, А. С. Мельников // Проблемы физики твердого тела и высоких давлений: Тезисы XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых (Сочи, 18-29 сентября 2019 г.) — С. 63—65.
- A7. *Kopasov, A. A.* Многократные топологические переходы, вызванные конкуренцией нормального и андреевского отражения / A. A. Kopasov, A. S. Mel'nikov // Тезисы докладов XXIII Уральской международной зимней школы по физике полупроводников (Екатеринбург, 17-22 февраля 2020 г.) — С. 11—12.
- A8. *Kopasov, A. A.* Multiple topological transitions driven by the interplay of the normal and Andreev scattering / A. A. Kopasov, A. S. Mel'nikov // Труды

XXIV Международного симпозиума "Нанозифика и нанозлектроника г. Нижний Новгород. Т. 1. — 2020. — С. 11—12.

- A9. *Копасов, А. А.* Особенности аномального эффекта Джозефсона в искривленных майорановских нанопроводах / А. А. Копасов, А. Г. Кутлин, А. С. Мельников // Проблемы физики твердого тела и высоких давлений: Тезисы XIX Всероссийской конференции (Сочи, 18-27 сентября 2020 г.) — С. 105—107.
- A10. *Kopasov, A. A.* Superconducting diode effect in curved proximitized nanowires / A. A. Kopasov, A. G. Kutlin, A. S. Mel'nikov // Труды XXV Международного симпозиума "Нанозифика и нанозлектроника"(Нижний Новгород, 9-12 марта 2021 г.) Т. 1. — С. 11—12.
- A11. *Kopasov, A. A.* Geometry controlled Josephson diode based on curved proximitized nanowires / A. A. Kopasov, A. G. Kutlin, A. S. Mel'nikov // Физика конденсированных состояний: сб. тезисов II Международной конференции (Черноголовка, 31 мая - 4 июня 2021 г.) — С. 41.
- A12. *Копасов, А. А.* Влияние спин-орбитального взаимодействия на температуру сверхпроводящего перехода гибридных структур сверхпроводник-ферромагнетик / А. А. Копасов, А. С. Мельников // Программа и Тезисы докладов XXIV Уральской международной зимней школы по физике полупроводников (Екатеринбург, 14-19 февраля 2022 г.) — С. 211—212.
- A13. *Копасов, А. А.* Влияние спин-орбитального взаимодействия на температуру сверхпроводящего перехода гибридных структур сверхпроводник-ферромагнетик / А. А. Копасов, А. С. Мельников // Тезисы докладов XXXIX Международной зимней школы физиков-теоретиков "Коуровка"(Екатеринбург, 3 - 9 апреля 2022 г.) — С. 37.

Список литературы

1. *Kammerling Onnes, H.* Further experiments with Liquid Helium. D. On the change of Electrical Resistance of Pure Metals at very low Temperatures, etc. V. The Disappearance of the resistance of mercury / H. Kammerling Onnes // Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Proceedings. — 1911. — Vol. 14. — P. 113—115.
2. *Bardeen, J.* Theory of Superconductivity / J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 108. — P. 1175—1204.
3. *Боголюбов, Н. Н.* О новом методе в теории сверхпроводимости / Н. Н. Боголюбов // ЖЭТФ. — 1958. — Т. 34. — С. 58—65.
4. *Cooper, L. N.* Bound Electron Pairs in a Degenerate Fermi Gas / L. N. Cooper // Phys. Rev. — 1956. — Vol. 104. — P. 1189—1190.
5. *Де Жен, П.* Сверхпроводимость металлов и сплавов / П. Де Жен. — Москва : Мир, 1968. — 280 с.
6. *Гинзбург, В. Л.* Ферромагнитные сверхпроводники / В. Л. Гинзбург // ЖЭТФ. — 1956. — Т. 31. — С. 202—210.
7. *Clogston, A. M.* Upper limit for the critical field in hard superconductors / A. M. Clogston // Phys. Rev. Lett. — 1962. — Vol. 9. — P. 266—267.
8. *Минеев, В. П.* Введение в теорию необычной сверхпроводимости / В. П. Минеев, К. В. Самохин. — Москва : Издательство МФТИ, 1998. — 144 с.
9. *Volovik, G. E.* Superconducting classes in heavy-fermion systems / G. E. Volovik, L. P. Gor'kov // Sov. Phys. JETP. — 1985. — Vol. 61. — P. 843—854.
10. *Березинский, В. Л.* Новая модель анизотропной фазы сверхтекучего He^3 / В. Л. Березинский // Письма в ЖЭТФ. — 1974. — Т. 20. — С. 628—631.
11. *Bergeret, F. S.* Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures / F. S. Bergeret, A. F. Volkov, K. V. Efetov // Rev. Mod. Phys. — 2005. — Vol. 77. — P. 1321—1373.

12. *Linder, J.* Odd-frequency superconductivity / J. Linder, A. V. Balatsky // Rev. Mod. Phys. — 2019. — Vol. 91. — P. 045005-1-045005—56.
13. *Holm, R.* Kontaktwiderstand Zwischen Supraleitern und Nichtsupraleitern / R. Holm, W. Meissner // Z. f. Physik. — 1932. — Vol. 74. — P. 715—735.
14. *Gennes, P. G. de.* Boundary Effects in Superconductors / P. G. de Gennes // Rev. Mod. Phys. — 1964. — Vol. 36. — P. 225—237.
15. *McMillan, W. L.* Tunneling Model of the Superconducting Proximity Effect / W. L. McMillan // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 175. — P. 537—542.
16. *Buzdin, A. I.* Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures / A. I. Buzdin // Rev. Mod. Phys. — 2005. — Vol. 77. — P. 935—976.
17. *Eschrig, M.* Spin-polarized supercurrents for spintronics / M. Eschrig // Phys. Today. — 2011. — Vol. 64(1). — P. 43—49.
18. *Linder, J.* Superconducting spintronics / J. Linder, J. W. A. Robinson // Nat. Phys. — 2015. — Vol. 11. — P. 307—315.
19. *Eschrig, M.* Spin-polarized supercurrents for spintronics: a review of current progress / M. Eschrig // Rep. Prog. Phys. — 2015. — Vol. 78. — 104501(50).
20. *Tagirov, L. R.* Low-Field Superconducting Spin Switch Based on a Superconductor / Ferromagnet Multilayer / L. R. Tagirov // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 83. — P. 2058—2061.
21. *Buzdin, A. I.* Spin-orientation-dependent superconductivity in F/S/F structures / A. I. Buzdin, A. V. Vedyayev, N. V. Ryzhanova // Europhys. Lett. — 1999. — Vol. 48. — P. 686—691.
22. *Oh, S.* A superconductive magnetoresistive memory element using controlled exchange interaction / S. Oh, D. Youm, B. M. R. // Appl. Phys. Lett. — 1997. — Vol. 71. — P. 2376—2378.
23. Full spin switch effect for the superconducting current in a superconductor/-ferromagnet thin film heterostructure / P. V. Leksin [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2010. — Vol. 97. — P. 102505-1-102505—3.
24. Evidence for Triplet Superconductivity in a Superconductor-Ferromagnet Spin Valve / P. V. Leksin [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 057005-1-057005—5.

25. Isolation of proximity-induced triplet pairing channel in a superconductor/ferromagnet spin valve / P. V. Leksin [et al.] // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 93. — P. 100502-1-100502—5.
26. Experimental observation of the triplet spin-valve effect in a superconductor-ferromagnet heterostructure / V. I. Zdravkov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 87. — P. 144507-1-144507—6.
27. Giant triplet proximity effect in superconducting pseudo spin valves with engineered anisotropy / X. L. Wang [et al.] // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89. — P. 140508-1-140508—4.
28. *Gu, Y.* Large Superconducting Spin Valve Effect and Ultrasmall Exchange Splitting in Epitaxial Rare-Earth-Niobium Trilayers / Y. Gu, J. W. A. Halász G. B. and Robinson, M. G. Blamire // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115. — P. 067201-1-067201—5.
29. *Samokhin, K. V.* Spin-orbit coupling and semiclassical electron dynamics in noncentrosymmetric metals / K. V. Samokhin // Ann. Phys. — 2009. — Vol. 324. — P. 2385—2407.
30. *Žutić, I.* Spintronics: Fundamentals and applications / I. Žutić, J. Fabian, S. Das Sarma // Rev. Mod. Phys. — 2004. — Vol. 76. — P. 323—410.
31. *Dresselhaus, G.* Spin-Orbit Coupling Effects in Zinc Blende Structures / G. Dresselhaus // Phys. Rev. — 1955. — Vol. 100. — P. 580—586.
32. *Bychkov, Y. A.* Properties of a 2D electron gas with lifted spectral degeneracy / Y. A. Bychkov, E. I. Rashba // JETP Lett. — 1984. — Vol. 39. — P. 78—81.
33. Experimental Separation of Rashba and Dresselhaus Spin Splittings in Semiconductor Quantum Wells / S. D. Ganichev [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2004. — Vol. 92. — P. 256601-1-256601—4.
34. *Volovik, G. E.* Fermion zero modes on vortices in chiral superconductors / G. E. Volovik // JETP Lett. — 1999. — Vol. 70. — P. 609—614.
35. *Reed, N.* Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect / N. Reed, D. Green // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 61. — P. 10267—10297.

36. *Das Sarma, S.* Proposal to stabilize and detect half-quantum vortices in strontium ruthenate thin films: Non-Abelian braiding statistics of vortices in a $p_x + ip_y$ superconductor / S. Das Sarma, C. Nayak, S. Tewari // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 220502-1-220502—4.
37. Majorana Bound States without Vortices in Topological Superconductors with Electrostatic Defects / M. Wimmer [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 046803-1-046803—4.
38. *Potter, A. C.* Multichannel Generalization of Kitaev's Majorana End States and a Practical Route to Realize Them in Thin Films / A. C. Potter, P. A. Lee // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 227003-1-227003—4.
39. *Mackenzie, A. P.* The superconductivity of Sr_2RuO_4 and the physics of spin-triplet pairing / A. P. Mackenzie, Y. Maeno // Rev. Mod. Phys. — 2003. — Vol. 75. — P. 657—712.
40. *Kallin, C.* Chiral p-wave order in Sr_2RuO_4 / C. Kallin // Rep. Prog. Phys. — 2012. — Vol. 75. — P. 042501.
41. *Kitaev, A. Y.* Unpaired Majorana fermions in quantum wires / A. Y. Kitaev // Phys.-Usp. — 2001. — Vol. 44. — P. 131—136.
42. Non-Abelian statistics anyons and topological quantum computation / C. Nayak [et al.] // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Vol. 80. — P. 1083—1159.
43. Non-Abelian statistics anyons and topological quantum information processing in 1D wire networks / J. Alicea [et al.] // Nat. Phys. — 2011. — Vol. 7. — P. 412—417.
44. *Alicea, J.* New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems / J. Alicea // Rep. Prog. Phys. — 2012. — Vol. 75. — 076501(36).
45. *Elliot, S. R.* Colloquium: Majorana fermions in nuclear, particle and solid-state physics / S. R. Elliot, M. Franz // Rev. Mod. Phys. — 2015. — Vol. 87. — P. 137—163.
46. *Das Sarma, S.* Majorana zero modes and topological quantum computation / S. Das Sarma, M. Freedman, C. Nayak // npj Quantum Inf. — 2015. — Vol. 1. — P. 15001.

47. Milestones Toward Majorana-Based Quantum Computing / D. Aasen [et al.] // Phys. Rev. X. — 2016. — Vol. 6. — 031016(28).
48. *Aguado, R.* Majorana quasiparticles in condensed matter / R. Aguado // Riv. del Nuovo Cim. — 2017. — Vol. 40. — P. 523—593.
49. *Fu, L.* Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator / L. Fu, C. L. Kane // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 096407-1-096407—4.
50. *Fu, L.* Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction / L. Fu, C. L. Kane // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79. — P. 161408-1-161408—4.
51. *Rakhmanov, A. L.* Majorana fermions in pinned vortices / A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, F. Nori // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 84. — P. 075141-1-075141—8.
52. *Ioselevich, P. A.* Majorana state on the surface of a disordered three-dimensional topological insulator / P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, M. V. Feigel'man // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86. — P. 035441-1-035441—10.
53. Non-Abelian quantum order in spin-orbit-coupled semiconductors: Search for topological Majorana particles in solid-state systems / J. D. Sau [et al.] // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — P. 214509-1-214509—26.
54. *Potter, A. C.* Majorana end states in multiband microstructures with Rashba spin-orbit coupling / A. C. Potter, P. A. Lee // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83. — P. 094525-1-094525—8.
55. *Lutchyn, R. M.* Majorana Fermions and a Topological Phase Transition in Semiconductor-Superconductor Heterostructures / R. M. Lutchyn, J. D. Sau, S. Das Sarma // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 077001-1-077001—4.
56. *Oreg, Y.* Helical Liquids and Majorana Bound States in Quantum Wires / Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Vol. 105. — P. 077002-1-077002—4.
57. *Lutchyn, R. M.* Search for Majorana Fermions in Multiband Semiconducting Nanowires / R. M. Lutchyn, T. D. Stanescu, S. Das Sarma // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 127001-1-127001—4.

58. *Stanescu, T. D.* Majorana fermions in semiconducting nanowires / T. D. Stanescu, R. M. Lutchyn, S. Das Sarma // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 84. — 144522(29).
59. *Aksenov, S. V.* Strong Coulomb interactions in the problem of Majorana modes in a wire of the nontrivial topological class BDI / S. V. Aksenov, A. O. Zlotnikov, M. S. Shustin // Phys. Rev. B. — 2020. — Vol. 101. — P. 125431-1-125431—17.
60. *Zlotnikov, A. O.* Spin-Orbit Coupling-Induced Effective Interactions in Superconducting Nanowires in the Strong Correlation Regime / A. O. Zlotnikov, S. V. Aksenov, M. S. Shustin // Phys. Solid State. — 2020. — Vol. 62. — P. 1612—1618.
61. *Shustin, M. S.* Effect of strong intersite Coulomb interaction on the topological properties of a superconducting nanowire / M. S. Shustin, S. V. Aksenov // Phys. Solid State. — 2022. — Vol. 64. — P. 2047—2053.
62. *Law, K. T.* Majorana fermion induced resonant Andreev reflection / K. T. Law, P. A. Lee, T. K. Ng // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — P. 237001-1-237001—4.
63. *Flensberg, K.* Tunneling characteristics of a chain of Majorana bound states / K. Flensberg // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — P. 180516-1-180516—4.
64. Signatures of Majorana Fermions in Hybrid Superconductor-Semiconductor Nanowire Devices / V. Mourik [et al.] // Science. — 2012. — Vol. 336. — P. 1003—1007.
65. Zero-bias peaks and splitting in an Al-InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions / A. Das [et al.] // Nat. Phys. — 2012. — Vol. 8. — P. 887—895.
66. Zero-bias oscillations and magnetoconductance crossover / H. O. H. Churchill [et al.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 87. — 241401(6).
67. Anomalous Modulation of a Zero-Bias Peak in a Hybrid Nanowire-Superconductor Device / A. D. K. Finck [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Vol. 110. — 126406(5).
68. Exponential protection of zero modes in Majorana islands / S. M. Albrecht [et al.] // Nature (London). — 2016. — Vol. 531. — P. 206—209.

69. Scaling of Majorana Zero-Bias Conductance Peaks / F. Nichele [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119. — 136803(5).
70. Concomitant opening of a bulk-gap with an emerging possible Majorana zero mode / A. Grivnin [et al.] // Nat. Commun. — 2019. — Vol. 10. — 1940(7).
71. Spin-Orbit Protection of Induced Superconductivity in Majorana Nanowires / J. D. S. Bommer [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2019. — Vol. 122. — 187702(7).
72. *Pan, H.* Physical mechanisms for zero-bias conductance peaks in Majorana nanowires / H. Pan, S. Das Sarma // Phys. Rev. Research. — 2020. — Vol. 2. — 013377(33).
73. Next steps of quantum transport in Majorana nanowires / H. Zhang [et al.] // Nat. Commun. — 2019. — Vol. 10. — 5128(7).
74. Topological superconductivity in full shell proximitized nanowires / R. M. Lutchyn [et al.] // arXiv:1809.05512. — 2020.
75. Flux-induced topological superconductivity in full-shell nanowires / S. Vaitiekėnas [et al.] // Science. — 2020. — Vol. 367. — eaav3392(9).
76. *Volkov, B. A.* Two-dimensional massless electrons in an inverted contact / B. A. Volkov, O. A. Pankratov // JETP Lett. — 1985. — Vol. 42. — P. 178—181.
77. *Bernevig, B. A.* Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells / B. A. Bernevig, T. A. Hughes, S.-C. Zhang // Science. — 2006. — Vol. 314. — P. 1757—1761.
78. *Makhlin, Y. G.* One-dimensional Fermi liquid and symmetry breaking in the vortex core / Y. G. Makhlin, G. E. Volovik // Pis'ma v ZhETF. — 1995. — Vol. 62. — P. 719—725.
79. *Silaev, M. A.* Andreev-Majorana bound states in superfluids / M. A. Silaev, G. E. Volovik // J. Exp. Theor. Phys. — 2014. — Vol. 119. — P. 1042—1057.
80. *Andreev, A. F.* The thermal conductivity of the intermediate state in superconductors / A. F. Andreev // Sov. Phys. JETP. — 1964. — Vol. 19. — P. 1228—1231.

81. *Caroli, C.* Bound Fermion states on a vortex line in a type II superconductor / C. Caroli, P.-G. de Gennes, J. Matricon // Phys. Lett. — 1964. — Vol. 9. — P. 307—309.
82. Structure of Vortex Lines in Pure Superconductors / J. Bardeen [et al.] // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 187. — P. 556—569.
83. Even-odd effect and Majorana states in full-shell nanowires / F. Peñaranda [et al.] // Phys. Rev. Res. — 2020. — Vol. 2. — P. 023171-1-023171—9.
84. Сверхпроводящая спинтроника: современное состояние и перспективы / А. С. Мельников [и др.] // УФН. — 2022. — Т. 192. — С. 1339—1384.
85. *Шукринов, Ю. М.* Аномальный эффект Джозефсона / Ю. М. Шукринов // УФН. — 2022. — Т. 194. — С. 345—385.
86. *Bobkova, I. V.* Magnetoelectric effects in Josephson junctions / I. V. Bobkova, A. M. Bobkov, M. A. Silaev // J. Phys.: Condens Matter. — 2022. — Vol. 34. — 353001(32).
87. *Buzdin, A.* Direct Coupling Between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson φ_0 Junction / A. Buzdin // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — 107005(4).
88. *Konschelle, F.* Magnetic Moment Manipulation by a Josephson Current / F. Konschelle, A. Buzdin // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 102. — P. 017001-1-017001—4.
89. Magnetization reversal by superconducting current in φ_0 Josephson junctions / Y. M. Shukrinov [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2017. — Vol. 110. — P. 182407-1-182407—5.
90. Electrical control of magnetization in superconductor/ferromagnet/superconductor junctions on a three-dimensional topological insulator / M. Nashaat [et al.] // Phys. Rev. B. — 2019. — Vol. 110. — P. 054506-1-054506—7.
91. *Tanaka, Y.* Manipulation of the Majorana Fermion, Andreev Reflection, and Josephson Current on Topological Insulators / Y. Tanaka, T. Yokoyama, N. Nagaosa // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — P. 107002-1-107002—4.
92. *Dolcini, F.* Topological Josephson ϕ_0 junctions / F. Dolcini, M. Houzet, J. S. Meyer // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 92. — 035428(7).

93. Spin-Orbit induced phase-shift in Bi₂Se₃ Josephson junctions / A. Assouline [et al.] // Nat. Commun. — 2019. — Vol. 10. — 126(8).
94. Anomalous Josephson Current in Junctions with Spin Polarizing Quantum Point Contacts / A. A. Reynoso [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 107001-1-107001—4.
95. Gate controlled anomalous phase shift in Al/InAs Josephson junctions / W. Mayer [et al.] // Nat. Commun. — 2020. — Vol. 11. — 212(6).
96. *Konschelle, F.* Theory of the spin-galvanic effect and the anomalous phase shift φ_0 in superconductors and Josephson junctions with intrinsic spin-orbital coupling / F. Konschelle, I. V. Tokatly, F. S. Bergeret // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 92. — 125443(16).
97. Anomalous Josephson Current through a Spin-Orbit Coupled Quantum Dot / A. Zazunov [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2009. — Vol. 103. — P. 147004-1-147004—4.
98. Anomalous Josephson current, incipient time-reversal symmetry breaking, and Majorana bound states in interacting multilevel dots / A. Brunetti [et al.] // Phys. Rev. B. — 2013. — Vol. 88. — P. 144515-1-144515—13.
99. Josephson ϕ_0 -junction in nanowire quantum dots / D. B. Szombati [et al.] // Nat. Phys. — 2016. — Vol. 12. — P. 586—572.
100. *Yokoyama, T.* Anomalous Josephson effect induced by spin-orbit interaction and Zeeman effect in semiconductor nanowires / T. Yokoyama, M. Eto, Y. V. Nazarov // Phys. Rev. B. — 2014. — Vol. 89. — 195407(14).
101. *Mironov, S. V.* Double Path Interference and Magnetic Oscillations in Cooper Pair Transport through a Single Nanowire / S. V. Mironov, A. S. Mel'nikov, A. I. Buzdin // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 114. — P. 227001-1-227001—5.
102. Spin-orbit coupling and anomalous Josephson effect in nanowires / G. Campagnano [et al.] // J. Phys. Condens. Matter. — 2015. — Vol. 27. — 205301(7).
103. *Nesterov, K. N.* Anomalous Josephson effect in semiconducting nanowires as a signature of the topologically nontrivial phase / K. N. Nesterov, M. Houzet, J. S. Meyer // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 93. — 174502(9).

104. A Josephson phase battery / E. Strambini [et al.] // Nat. Nanotechnol. — 2020. — Vol. 15. — P. 656—660.
105. Quantum ratchet effect for vortices / J. B. Majer [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — P. 056802-1-056802—4.
106. A superconducting reversible rectifier that controls the motion of magnetic flux quanta / J. E. Villegas [et al.] // Science. — 2003. — Vol. 302. — P. 1188—1191.
107. Considerable enhancement of the critical current in a superconducting film by a magnetized magnetic strip / D. Y. Vodolazov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 72. — P. 064509-1-064509—6.
108. Controlled multiple reversals of a ratchet effect / C. C. de Souza Silva [et al.] // Nature. — 2006. — Vol. 440. — P. 651—654.
109. *Morelle, M.* Enhanced critical currents through field compensation with magnetic strips / M. Morelle, V. V. Moshchalkov // Appl. Phys. Lett. — 2006. — Vol. 88. — P. 172507-1-172507—3.
110. Non-reciprocity of vortex-limited critical current in conventional superconducting micro-bridges / D. Suri [et al.] // Appl. Phys. Lett. — 2022. — Vol. 121. — P. 102601-1-102601—5.
111. Observation of superconducting diode effect / F. Ando [et al.] // Nature (London). — 2020. — Vol. 584. — P. 373—376.
112. *Fominov, Y. V.* Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode / Y. V. Fominov, D. S. Mikhailov // Phys. Rev. B. — 2022. — Vol. 106. — P. 134514-1-134514—15.
113. *Souto, R. S.* Josephson Diode Effect in Supercurrent Interferometers / R. S. Souto, M. Leijnse, C. Schrade // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 129. — P. 267702-1-267702—6.
114. Nonreciprocal charge transport in noncentrosymmetric superconductors / R. Wakatsuki [et al.] // Sci. Adv. — 2017. — Vol. 3. — e1602390(8).
115. Nonreciprocal charge transport at topological insulator/superconductor interface / K. Yasuda [et al.] // Nat. Commun. — 2019. — Vol. 10. — 2734(6).

116. *Daido, A.* Intrinsic Superconducting Diode Effect / A. Daido, Y. Ikeda, Y. Yanase // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 128. — P. 037001-1-037001—6.
117. *Yuan, N. F. Q.* Supercurrent diode effect and finite momentum superconductivity / N. F. Q. Yuan, L. Fu // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2022. — Vol. 119. — e2119548119(7).
118. *Ilić, S.* Theory of the Supercurrent Diode Effect in Rashba Superconductors with Arbitrary Disorder / S. Ilić, F. S. Bergeret // Phys. Rev. Lett. — 2022. — Vol. 128. — P. 177001-1-177001—6.
119. *He, J. J.* A phenomenological theory of superconductor diodes / J. J. He, Y. Tanaka, N. Nagaosa // New J. Phys. — 2022. — Vol. 24. — 053014(9).
120. Hybrid helical state and superconducting diode effect in superconductor/ferromagnet/topological insulator heterostructures / T. Karabassov [et al.] // Phys. Rev. B. — 2022. — Vol. 106. — P. 224509-1-224509—11.
121. Asymmetric Josephson effect in inversion symmetry breaking topological materials / C.-Z. Chen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2018. — Vol. 98. — P. 075430-1-075430—5.
122. Supercurrent rectification and magnetochiral effects in symmetric Josephson junctions / C. Baumgartner [et al.] // Nat. Nanotechnol. — 2022. — Vol. 17. — P. 39—44.
123. Josephson diode effect from Cooper pair momentum in a topological semimetal / B. Pal [et al.] // Nat. Phys. — 2022. — Vol. 18. — P. 1228—1233.
124. *Kokkeler, T. H.* Field-free anomalous junction and superconducting diode effect in spin-split superconductor/topological insulator junctions / T. H. Kokkeler, A. A. Golubov, F. S. Bergeret // Phys. Rev. B. — 2022. — Vol. 106. — P. 214504-1-214504—8.
125. General Theory of Josephson Diodes / Y. Zhang [et al.] // Phys. Rev. X. — 2022. — Vol. 12. — P. 041013-1-041013—11.
126. *Davydova, M.* Universal Josephson diode effect / M. Davydova, S. Prembabu, L. Fu // Sci. Adv. — 2022. — Vol. 8. — eabo0309(7).

127. *Spånslätt, C.* Geometric Josephson effects in chiral topological nanowires / C. Spånslätt // Phys. Rev. B. — 2018. — Vol. 98. — 054508(7).
128. *Kutlin, A. G.* Geometry-dependent effects in Majorana nanowires / A. G. Kutlin, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2020. — Vol. 101. — 045418(7).
129. Multiple Andreev reflection and critical current in topological superconducting nanowire junctions / P. San-Jose [et al.] // New J. Phys. — 2013. — Vol. 15. — 075019(18).
130. SNS junctions in nanowires with spin-orbit coupling: Role of confinement and helicity on the subgap spectrum / J. Cayao [et al.] // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 91. — 024514(15).
131. Majorana splitting from critical currents in Josephson junctions / J. Cayao [et al.] // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 96. — 205425(9).
132. *Cayao, J.* Finite-length effect on supercurrents between trivial and topological superconductors / J. Cayao, A. M. Black-Schaffer // Eur. Phys. J.: Spec. Top. — 2018. — Vol. 227. — P. 1387—1396.
133. Energy spectrum and current-phase relation of a nanowire Josephson junction close to the topological transition / C. Murthy [et al.] // Phys. Rev. B. — 2020. — Vol. 101. — 224501(26).
134. *Cheng, M.* Josephson current through a superconductor/semiconductor-nanowire/superconductor junction: Effects of strong spin-orbit coupling and Zeeman splitting / M. Cheng, R. M. Lutchyn // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86. — 134522(9).
135. *Pikulin, D. I.* Phenomenology and dynamics of a Majorana Josephson junction / D. I. Pikulin, Y. V. Nazarov // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86. — 140504(5).
136. *Marra, P.* Signatures of topological phase transitions in Josephson current-phase discontinuities / P. Marra, R. Citro, A. Braggio // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 93. — 220507(6).
137. Signatures of topological Josephson junctions / Y. Peng [et al.] // Phys. Rev. B. — 2016. — Vol. 94. — 085409(22).

138. Transparent Semiconductor-Superconductor Interface and Induced Gap in Epitaxial Heterostructure Josephson Junction / M. Kjaergaard [et al.] // Phys. Rev. Appl. — 2017. — Vol. 7. — 034029(9).
139. Conduction channels of an InAs-Al nanowire Josephson weak link / M. F. Goffman [et al.] // New J. Phys. — 2017. — Vol. 19. — 092002(5).
140. Epitaxy of advanced nanowire quantum devices / S. Gazibegovic [et al.] // Nature (London). — 2017. — Vol. 548. — P. 434—438.
141. Growth of InAs Wurtzite Nanocrosses from Hexagonal and Cubic Basis / F. Krizek [et al.] // Nano Lett. — 2017. — Vol. 17. — P. 6090—6096.
142. Zero-bias peaks at zero magnetic field in ferromagnetic hybrid nanowires / S. Vaitikėnas [et al.] // Nat. Phys. — 2021. — Vol. 17. — P. 43—47.
143. Currents Induced by Magnetic Impurities in Superconductors with Spin-Orbit Coupling / S. S. Pershoguba [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2015. — Vol. 115. — P. 116602-1-116602—6.
144. *Mironov, S.* Spontaneous Currents in Superconducting Systems with Strong Spin-Orbit Coupling / S. Mironov, A. Buzdin // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 118. — P. 077001-1-077001—5.
145. *Robinson, J. W. A.* Chirality-controlled spontaneous currents in spin-orbit coupled superconducting rings / J. W. A. Robinson, A. V. Samokhvalov, A. I. Buzdin // Phys. Rev. B. — 2019. — Vol. 99. — 180501(5).
146. Phase transitions in superconductor/ferromagnet bilayer driven by spontaneous supercurrents / Z. Devizorova [et al.] // Phys. Rev. B. — 2021. — Vol. 103. — P. 064504-1-064504—7.
147. *Edelstein, V. M.* Characteristics of the Cooper pairing in two-dimensional noncentrosymmetric electron systems / V. M. Edelstein // Sov. Phys. JETP. — 1989. — Vol. 68. — P. 1244—1249.
148. *Edelstein, V. M.* The Ginzburg-Landau equation for superconductors of polar symmetry / V. M. Edelstein // J. Phys.: Condens. Matter. — 1996. — Vol. 8. — P. 339—349.
149. *Samokhin, K. V.* Magnetic properties of superconductors with strong spin-orbit coupling / K. V. Samokhin // Phys. Rev. B. — 2004. — Vol. 70. — P. 104521-1-104521—13.

150. *Kaur, R. P.* Helical Vortex Phase in the Noncentrosymmetric CePt₃Si / R. P. Kaur, D. F. Agterberg, M. Sigrist // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 94. — P. 137002-1-137002—4.
151. *Dimitrova, O.* Theory of a two-dimensional superconductor with broken inversion symmetry / O. Dimitrova, M. V. Feigel'man // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 76. — P. 014522-1-014522—22.
152. *Mineev, V. P.* Nonuniform states in noncentrosymmetric superconductors: Derivation of Lifshitz invariants from microscopic theory / V. P. Mineev, K. V. Samokhin // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78. — P. 144503-1-144503—5.
153. *Houzet, M.* Quasiclassical theory of disordered Rashba superconductors / M. Houzet, J. Meyer // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 92. — P. 014509-1-014509—5.
154. *Hals, K. M. D.* Magnetoelectric coupling in superconductor/helium magnet heterostructures / K. M. D. Hals // Phys. Rev. B. — 2017. — Vol. 95. — P. 134504-1-134504—10.
155. *Tokuyasu, T.* Proximity effect of a ferromagnetic insulator in contact with a superconductor / T. Tokuyasu, J. A. Sauls, D. Rainer // Phys. Rev. B. — 1988. — Vol. 38. — P. 8823—8833.
156. *Virtanen, P.* Quasiclassical free energy of superconductors: Disorder-driven first-order phase transition in superconductor/ferromagnetic-insulator bilayers / P. Virtanen, A. Vargunin, M. Silaev // Phys. Rev. B. — 2020. — Vol. 101. — P. 094507-1-094507—11.
157. The inverse proximity effect in strong ferromagnet-superconductor structures / V. O. Yagovtsev [et al.] // Supercond. Sci. Technol. — 2021. — Vol. 34. — P. 025003-1-094507—11.
158. Coexistence of superconductivity and spin-splitting fields in superconductor/ferromagnetic insulator bilayers of arbitrary thickness / A. Hijano [et al.] // Phys. Rev. Research. — 2021. — Vol. 3. — P. 023131-1-023131—13.
159. Zero-bias peaks at zero magnetic field in ferromagnetic hybrid nanowires / S. Vaitiekėnas [et al.] // Nat. Phys. — 2021. — Vol. 17. — P. 43—47.

160. *Barzykin, V.* Inhomogeneous Stipe Phase Revisited for Surface Superconductivity / V. Barzykin, L. Gor'kov // Phys. Rev. Lett. — 2002. — Vol. 89. — P. 227002-1-227002—4.
161. *Zwicknagl, G.* Critical magnetic field of ultra-thin superconducting films and interfaces / G. Zwicknagl, S. Jahns, P. Fulde // J. Phys. Soc. Jpn. — 2017. — Vol. 86. — P. 083701-1-083701—4.
162. Tunable critical field in Rashba superconductor thin films / L. A. B. Olde Olthof [et al.] // Phys. Rev. B. — 2021. — Vol. 103. — P. L020504.
163. Giant Oscillations of Energy levels in Mesoscopic Superconductors / N. B. Kopnin [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 197002-1-197002—4.
164. Enhanced vortex heat conductance in mesoscopic superconductors / N. B. Kopnin [et al.] // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 024515-1-024514—11.
165. *Mel'nikov, A. S.* Local density of states around single vortices and vortex pairs: Effect of boundaries and hybridization of vortex core states / A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, M. A. Silaev // Phys. Rev. B. — 2009. — Vol. 79. — P. 134521-1-134521—8.
166. *Woods, B. D.* Electronic structure of full-shell InAs/Al hybrid semiconductor-superconductor nanowires: Spin-orbit coupling and topological phase space / B. D. Woods, S. Das Sarma, T. D. Stanescu // Phys. Rev. B. — 2019. — Vol. 99. — P. 161118-1-161118—5.
167. *Luo, N.* k.p theory of freestanding narrow band gap semiconducting nanowires / N. Luo, G. Liao, H. Q. Xu // AIP Advances. — 2016. — Vol. 6. — P. 125109-1-125109—24.
168. *Virtanen, S. M. M.* Multiquantum vortices in superconductors: Electronic and scanning tunneling microscopy spectra / S. M. M. Virtanen, M. M. Salomaa // Phys. Rev. B. — 1999. — Vol. 60. — P. 14581—14584.
169. *Tanaka, K.* Electronic structure of multiquantum giant vortex states in mesoscopic superconducting disks / K. Tanaka, I. Robel, B. Jankó // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 2002. — Vol. 99. — P. 5233—5236.

170. Unconventional Vortex States in Nanoscale Superconductors Due to Shape-Induced Resonances in the inhomogeneous Cooper-pair Condensate / L.-F. Zhang [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Vol. 109. — P. 107001-1-107001—5.
171. *Degtyarev, V. E.* Features of electron gas in InAs nanowires imposed by interplay between nanowire geometry, doping and surface states / V. E. Degtyarev, S. V. Khazanova, N. V. Demarina // Sci. Rep. — 2017. — Vol. 7. — 3411(9).
172. Effects of Gate-Induced Electric Fields on Semiconductor Majorana Nanowires / A. E. Antipov [et al.] // Phys. Rev. X. — 2018. — Vol. 8. — P. 031041-1-031041—18.
173. Hybridization at Superconductor-Semiconductor Interfaces / A. E. G. Mikkelsen [et al.] // Phys. Rev. X. — 2018. — Vol. 8. — P. 031040-1-031040—17.
174. *Woods, B. D.* Effective theory approach to the Schrödinger-Poisson problem in semiconductor Majorana devices / B. D. Woods, T. D. Stanescu, S. Das Sarma // Phys. Rev. B. — 2018. — Vol. 98. — P. 035428-1-035428—28.
175. *Abramowitz, M.* Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — New York : Dover Publications, 1965.
176. *Vurgaftman, I.* Band parameters for III-V compound semiconductors and their alloys / I. Vurgaftman, J. R. Meyer, L. R. Ram-Mohan // J. Appl. Phys. — 2001. — Vol. 89. — P. 5815—5875.
177. *Little, W. A.* Observation of Quantum Periodicity in the Transition Temperature of a Superconducting Cylinder / W. A. Little, R. D. Parks // Phys. Rev. Lett. — 1962. — Vol. 9. — P. 9—12.
178. *Parks, R. D.* Fluxoid Quantization in a Multiply-Connected Superconductor / R. D. Parks, W. A. Little // Phys. Rev. — 1964. — Vol. 9. — A97—A103.
179. *Averin, D. V.* Single-electron charging of a superconducting island / D. V. Averin, Y. V. Nazarov // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69. — P. 1993—1996.

180. Experimental evidence for parity-based $2e$ periodicity in a superconducting single-electron tunneling transistor / M. T. Tuominen [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 1992. — Vol. 69. — P. 1997—2000.
181. *Oppen, F. von.* Topological superconducting phases in one dimension, in C. Chamon, and others (eds), Topological Aspects of Condensed Matter Physics: Lecture notes of the Les Houches Summer School: Volume 103 August 2014 / F. von Oppen, Y. Peng, F. Pientka. — Oxford University Press, 2017.
182. *Qi, X.-L.* Topological insulators and superconductors / X.-L. Qi, S.-C. Zhang // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Vol. 83. — P. 1057—1110.
183. *Blonder, G. E.* Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion / G. E. Blonder, M. Tinkham, T. M. Klapwijk // Phys. Rev. B. — 1982. — Vol. 25. — P. 4515—4532.
184. *Millis, A.* Quasiclassical theory of superconductivity near magnetically active interfaces / A. Millis, D. Rainer, J. A. Sauls // Phys. Rev. B. — 1988. — Vol. 38. — P. 4504—4515.
185. *Fogelström, M.* Josephson currents through spin-active interfaces / M. Fogelström // Phys. Rev. B. — 2000. — Vol. 62. — P. 11812—11819.
186. *Sun, K.* General framework for transport in spin-orbit-coupled superconducting heterostructures: Nonuniform spin-orbit coupling and spin-orbit active interfaces / K. Sun, N. Shah // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 91. — 144508(8).
187. *Beenakker, C. W. J.* Universal Limit of Critical-Current Fluctuations in Mesoscopic Josephson Junctions / C. W. J. Beenakker // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 3836—3839.
188. *Kopnin, N. B.* Proximity-induced superconductivity in two-dimensional electronic systems / N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 84. — 064524(9).
189. *Pickett, W. E.* Half metallic magnetic / W. E. Pickett, J. S. Moodera // Phys. Today. — 2001. — Vol. 54(5). — P. 39—44.

190. *Coey, J. M. D.* Half-metallic ferromagnetism: Example of CrO_2 (invited) / J. M. D. Coey, M. Venkatesan // J. Appl. Phys. — 2002. — Vol. 91. — P. 8345—8350.
191. A spin triplet supercurrent through the half-metallic ferromagnet CrO_2 / R. S. Keizer [et al.] // Nature (London). — 2006. — Vol. 439. — P. 825—827.
192. Equal-spin Andreev reflection and long-range coherent transport in high-temperature superconductor/half-metallic ferromagnet junctions / C. Visani [et al.] // Nat. Phys. — 2012. — Vol. 8. — P. 539—543.
193. Colossal Proximity Effect in a Superconducting Triplet Spin Valve Based on the Half-Metallic Ferromagnet CrO_2 / A. Singh [et al.] // Phys. Rev. X. — 2015. — Vol. 5. — P. 021019-1-021019—6.
194. *Kamashev, A. A.* Proximity Effect in Heterostructures Based on a Superconductor/Half-Metal System / A. A. Kamashev, I. A. Garifullin // JETP Lett. — 2021. — Vol. 113. — P. 194—206.
195. *Jacobsen, S. H.* Critical temperature and tunneling spectroscopy of superconductor-ferromagnet hybrids with intrinsic Rashba-Dresselhaus spin-orbit coupling / S. H. Jacobsen, J. A. Ouassou, J. Linder // Phys. Rev. B. — 2015. — Vol. 92. — P. 024510-1-024510—24.
196. *Simensen, H. T.* Tunable superconducting critical temperature in ballistic hybrid structures with strong spin-orbit coupling / H. T. Simensen, J. Linder // Phys. Rev. B. — 2018. — Vol. 97. — P. 054518-1-054518—14.
197. *Blatt, J. M.* Shape Resonances in Superconducting Thin Films / J. M. Blatt, C. J. Thompson // Phys. Rev. Lett. — 1963. — Vol. 10. — P. 332—334.
198. *Shanenko, A. A.* Oscillations of the superconducting temperature induced by quantum well states in thin metallic films: Numerical solution of the Bogoliubov–de Gennes equations / A. A. Shanenko, M. D. Croitoru, F. M. Peeters // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 014519-1-014519—9.
199. Superconductivity modulated by quantum size effects / Y. Guo [et al.] // Science. — 2004. — Vol. 306. — P. 1915—1917.
200. *Baumard, J.* Nonuniform superconductivity in wires with strong spin-orbit coupling / J. Baumard, J. Cayssol, A. Buzdin // Eur. Phys. J. B. — 2020. — Vol. 93. — 130(10).

201. Superconductivity and spin-orbit coupling in noncentrosymmetric materials: A review / M. Smidman [et al.] // Rep. Prog. Phys. — 2017. — Vol. 80. — 036501(46).
202. Spin-Mixing Enhanced Proximity Effect in Aluminum-Based Superconductor–Semiconductor Hybrids / G. P. Mazur [et al.] // Adv. Mater. — 2022. — Vol. 34. — 2202034(8).
203. Spin-selective Peirels transition in interacting one-dimensional conductors with spin-orbit interaction / B. Braunecker [et al.] // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — 045127(5).
204. *Kjaergaard, M.* Majorana fermions in superconducting nanowires without spin-orbit coupling / M. Kjaergaard, K. Wölms, K. Flensberg // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85. — 020503(4).

Приложение А

А.1 Вывод уравнения (1.1)

В данном разделе приводится вывод уравнения (1.1) в основном тексте. В случае $\Phi \lesssim \Phi_0$ и для плоского профиля дна зоны проводимости в полупроводниковом коре, решения (1.6) имеют вид

$$\Psi_{\mu, k_z}(r) = \begin{bmatrix} f_{\mu, k_z}^+(r) \\ f_{\mu, k_z}^-(r) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1a})$$

$$f_{\mu, k_z}^+(r) = C^+ J_{|\mu_e|}(\varkappa_e r), \quad (\text{A.1б})$$

$$f_{\mu, k_z}^-(r) = C^- J_{|\mu_h|}(\varkappa_h r), \quad (\text{A.1в})$$

$$\frac{\hbar^2 \varkappa_e^2}{2m^*} = E_{\perp}^c + E - \mu_e \hbar \omega_c / 2, \quad (\text{A.1г})$$

$$\frac{\hbar^2 \varkappa_h^2}{2m^*} = E_{\perp}^c - E + \mu_h \hbar \omega_c / 2, \quad (\text{A.1д})$$

где C^{\pm} - действительные постоянные, $J_{\mu}(x)$ - функция Бесселя первого рода порядка μ , $\mu_{e,h} = (\mu \mp n/2)$, $E_{\perp}^c = (E_F^c - p_z^2/2m^*)$, и E_F^c - энергия Ферми для электронов в коре. Используя асимптотическую форму функций Бесселя при больших аргументах [81; 82] и сшивая радиальную часть волновой функции на интерфейсе ПП/СП с помощью матрицы рассеяния, которая учитывает андреевское и нормальное отражение, мы получаем следующее уравнение на спектр подщелевых состояний квазичастиц:

$$e^{2i\alpha} [\mathcal{R}^2 - \mathcal{R}(e^{-2i\varphi_e} + e^{2i\varphi_h}) + e^{-2i\varphi_e + 2i\varphi_h}] - e^{-2i\varphi_e + 2i\varphi_h} \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}(e^{-2i\varphi_e} + e^{2i\varphi_h}) - 1 = 0, \quad (\text{A.2a})$$

$$\varphi_e \approx \frac{\varkappa_e}{k_{\perp}} \left(k_{\perp} R_c + \frac{\mu_e^2}{2k_{\perp} R_c} - \frac{\pi}{2} |\mu_e| \right) - \pi/4, \quad (\text{A.2б})$$

$$\varphi_h \approx \frac{\varkappa_h}{k_{\perp}} \left(k_{\perp} R_c + \frac{\mu_h^2}{2k_{\perp} R_c} - \frac{\pi}{2} |\mu_h| \right) - \pi/4. \quad (\text{A.2в})$$

Здесь \mathcal{R} - коэффициент нормального отражения по амплитуде (для простоты мы будем считать \mathcal{R} действительным), $\alpha = \arccos(E/|\Delta|)$. В случае доминиру-

ющего андреевского отражения $\mathcal{R} = 0$ мы получем уравнение

$$e^{2i\alpha - 2i\varphi_e + 2i\varphi_h} - 1 = 0, \quad (\text{A.3})$$

которое в пределе $|E| \ll E_{\perp}^c$, $|\Delta|$ имеет хорошо известное решение, описывающее спектр Кароли - де Жена - Матрикона [81]:

$$E^{(0)}(\mu, k_z) = \omega_0 \mu. \quad (\text{A.4})$$

В линейном порядке по \mathcal{R} спектр модифицируется следующим образом [163–165]:

$$E(\mu, k_z) = E^{(0)}(\mu, k_z) - \delta \sin(2k_{\perp}^c R_c - \pi\mu), \quad (\text{A.5})$$

где $\delta = 2|\Delta|\mathcal{R}$. Добавляя сдвиг уровней, вызванный орбитальным эффектом магнитного поля (так называемые доплеровский сдвиг) $\mu\omega_H/2$ и эффектом Зеемана V_Z , мы получаем выражение (1.1) в основном тексте. Для полноты приведем также зависимость вероятности нормального отражения от границы ПП/СП $\mathcal{R}^2(k_z)$ при достаточно больших толщинах оболочки $d_s \gtrsim \xi$

$$\mathcal{R}^2(k_z) = \left[\frac{Z(k_z) - 1}{Z(k_z) + 1} \right]^2, \quad Z(k_z) = \frac{k_{\perp}^c m_s}{k_{\perp}^s m^*}. \quad (\text{A.6})$$

Здесь $k_{\perp}^s = \sqrt{(k_F^s)^2 - k_z^2}$, и $\hbar k_F^s$ - импульс Ферми в несверхпроводящем состоянии оболочки.

A.2 Вывод граничных условий для волновой функции квазичастиц в полупроводниковом коре на интерфейсе полупроводник/сверхпроводник

Данный раздел посвящен выводу граничных условий для волновой функции квазичастиц вблизи границы полупроводник/сверхпроводник. Пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием, решения уравнений БДЖ (1.2) в сверхпроводящей оболочке могут быть представлены в форме (1.5), а радиальная часть ищется в виде [81; 82]:

$$\Psi_{\mu, k_z}(r) = g_{\mu, k_z}(r) H_l^{(1)}(k_{\perp}^s r) + \text{c.c.} . \quad (\text{A.7})$$

Здесь $g_{\mu,k_z}(r)$ - медленно меняющаяся огибающая, $H_l^{(1)(2)}(x)$ - функции Ханкеля первого и второго рода порядка $l = \sqrt{\mu^2 + n^2/4}$. Мы используем квазиклассическую форму функции Ханкеля [82]:

$$H_l^{(1)}(k_{\perp}^s r) \sim \exp\left(i \int_{r_t}^r \beta(r') dr'\right) / (r^2 - r_t^2)^{1/4}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\beta(r) = (k_{\perp}^s/r) (r^2 - r_t^2)^{1/2}, \quad (\text{A.8б})$$

где $r_t = l/k_{\perp}^s$ - точка поворота. Подставляя (5) и (A.7) в (2), мы получаем следующее уравнение на огибающую, записанное в безразмерных переменных

$$-2i\tilde{\tau}_z \frac{dg_{\mu,k_z}}{dx} + \tilde{\tau}_x g_{\mu,k_z} = \Lambda g_{\mu,k_z}, \quad (\text{A.9a})$$

$$x = (2m_s|\Delta|/\hbar^2 k_{\perp}^s) (r^2 - r_t^2)^{1/2}, \quad (\text{A.9б})$$

решение которого имеет вид

$$g_{\mu,k_z}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\varphi_s} \end{pmatrix} e^{\zeta x/2} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\varphi_s} \end{pmatrix} e^{-\zeta x/2}. \quad (\text{A.10})$$

В приведенных выше выражениях $\Lambda = \tilde{E}/|\Delta|$, $\tilde{E} = E - \mu\hbar V_s(R_c)/R_c$, $V_s(R_c) = (\hbar/2m_s R_c)(\Phi/\Phi_0 - n)$, $C_{1,2}$ - произвольные постоянные, $\varphi_s = \arccos(\tilde{E}/\zeta)$, и $\zeta = \sqrt{1 - \Lambda^2}$. Уравнение (A.9) справедливо в случае $d_s \ll R_c$, ξ . Накладывая жесткие граничные условия на волновую функцию квазичастиц при $r = R$, где $R = R_c + d_s$ - радиус гибридного нанопровода, мы исключаем пару комплексно сопряженных коэффициентов и получаем

$$\Psi_{\mu,k_z}(r) = \begin{bmatrix} u_{\mu,k_z}^s(r) \\ v_{\mu,k_z}^s(r) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

где

$$u_{\mu, k_z}^s(r) = \bar{C}_1 \left[e^{\lambda/2} H_l^{(1)} - K H_l^{(2)} \left(\varkappa_2 e^{\lambda^*/2} + \varkappa_1 e^{-\lambda^*/2} \right) \right] + \bar{C}_2 \left[e^{-\lambda/2} H_l^{(1)} - K H_l^{(2)} \left(\varkappa_1 e^{\lambda^*/2} + \varkappa_2 e^{-\lambda^*/2} \right) \right], \quad (\text{A.12a})$$

$$v_{\mu, k_z}^s(r) = \bar{C}_1 \left\{ (\Lambda + i\zeta) H_l^{(1)} e^{\lambda/2} - K H_l^{(2)} \left[\varkappa_2 (\Lambda - i\zeta^*) e^{\lambda^*/2} + \varkappa_1 (\Lambda + i\zeta^*) e^{-\lambda^*/2} \right] \right\} + \bar{C}_2 \left\{ (\Lambda - i\zeta) H_l^{(1)} e^{-\lambda/2} - K H_l^{(2)} \left[\varkappa_1 (\Lambda - i\zeta^*) e^{\lambda^*/2} + \varkappa_2 (\Lambda + i\zeta^*) e^{-\lambda^*/2} \right] \right\}, \quad (\text{A.12б})$$

$$\lambda(r) = \zeta[x(r) - x_R]. \quad (\text{A.12в})$$

Для краткости записи мы опускаем аргументы $(k_{\perp}^s r)$ функций Ханкеля и вводим $K = H_l^{(1)}(k_{\perp}^s R)/H_l^{(2)}(k_{\perp}^s R)$, $\zeta' = \text{Re}(\zeta)$, $\zeta'' = \text{Im}(\zeta)$, $\varkappa_1 = \zeta'/\zeta^*$, $\varkappa_2 = 1 - \varkappa_1$, $x_R = x(R)$, а $x(r)$ определена уравнением (A.96). Полученное решение вблизи интерфейса сверхпроводник/полупроводник может быть переписано в матричном виде

$$\Psi_{\mu, k_z}(R_c + 0) = \check{B} \bar{C}, \quad (\text{A.13})$$

где $\bar{C} = [\bar{C}_1, \bar{C}_2]^T$, и матричные элементы \check{B} легко находятся из (A.12). В пределе $k_{\perp}^s R_c \gg 1$ и $|\mu| \ll k_{\perp}^s R_c$, производная волновой функции на интерфейсе может быть представлена в виде

$$\left. \frac{d\Psi_{\mu, k_z}}{dr} \right|_{r=R_c+0} = \check{A} \bar{C}, \quad (\text{A.14})$$

где

$$\mathcal{A}_{11} = i\beta_c e^{\lambda_c/2} H_l^{(1)} + i\beta_c K H_l^{(2)} \left(\varkappa_2 e^{\lambda_c^*/2} + \varkappa_1 e^{-\lambda_c^*/2} \right), \quad (\text{A.15a})$$

$$\mathcal{A}_{22} = i\beta_c (\Lambda - i\zeta) e^{-\lambda_c/2} H_l^{(1)} + i\beta_c K H_l^{(2)} \left[\varkappa_1 (\Lambda - i\zeta^*) e^{\lambda_c^*/2} + \varkappa_2 (\Lambda + i\zeta^*) e^{-\lambda_c^*/2} \right], \quad (\text{A.15б})$$

$$\mathcal{A}_{12} = \mathcal{A}_{11} (\zeta \rightarrow -\zeta), \quad (\text{A.15в})$$

$$\mathcal{A}_{21} = \mathcal{A}_{22} (\zeta \rightarrow -\zeta). \quad (\text{A.15г})$$

Здесь $\lambda_c = \lambda(R_c)$, функция $\lambda(r)$ определена в (A.12B), и $\beta_c = (k_{\perp}^s/R_c)\sqrt{R_c^2 - r_t^2}$.
Наконец, комбинируя (A.13) и (A.14)

$$\left. \frac{d\Psi_{\mu,k_z}}{dr} \right|_{r=R_c+0} = \check{\mathcal{A}}\check{\mathcal{B}}^{-1}\Psi_{\mu,k_z}(R_c) , \quad (\text{A.16})$$

и используя правила сшивки

$$\Psi_{\mu,k_z}(R_c - 0) = \Psi_{\mu,k_z}(R_c + 0) , \quad (\text{A.17a})$$

$$\left. \frac{d\Psi_{\mu,k_z}}{dr} \right|_{r=R_c-0} = \left(\frac{m^*}{m_s} \right) \left. \frac{d\Psi_{\mu,k_z}}{dr} \right|_{r=R_c+0} , \quad (\text{A.17b})$$

мы получаем граничные условия для волновой функции квазичастиц на интерфейсе полупроводник/сверхпроводник (1.12).

Приложение Б

Б.1 Детали численного моделирования джозефсоновского транспорта

В данном разделе приведены детали численного моделирования. Отправной точкой служит уравнения БдЖ (2.1), а геометрия задачи схематично изображена на Рис. 2.1 (без ограничения общности, мы предполагаем, что контакт расположен при $s = 0$). Для численных расчетов удобно использовать формальную эквивалентность между неоднородным спин-орбитальным взаимодействием Рашбы и неоднородным спин-расщепляющим полем [203; 204]. Производя унитарное преобразование оператора (2.16) в спиновом пространстве $\check{\mathcal{H}}(s) = \check{U}^\dagger(s)\check{H}_{\text{BdG}}(s)\check{U}(s)$, где

$$\check{U}(s) = \exp \left[ik_{so} \int_0^s ds' \hat{\sigma}_n(s') \right], \quad (\text{Б.1})$$

мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\check{\mathcal{H}}(s)\check{\Psi}(s) = E\check{\Psi}(s), \quad (\text{Б.2a})$$

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{H}}(s) = & \left[\frac{p^2}{2m} - \tilde{\mu}(s) \right] \check{\tau}_z + \mathbf{h}(s) [\check{U}^\dagger(s)\hat{\boldsymbol{\sigma}}\check{U}(s)] \\ & + |\Delta| [\tau_x \cos \varphi(s) - \tau_y \sin \varphi(s)]. \end{aligned} \quad (\text{Б.2б})$$

Здесь $k_{so} = m\alpha/\hbar$, $\tilde{\mu}(s) = \mu(s) + m\alpha^2/2$, и $\check{\Psi}(s) = \check{U}^\dagger(s)\Psi(s)$. Подставляя ступенчатый профиль для геометрической фазы $\chi(s) = \chi\Theta(s)$ в (Б.1), мы получаем

$$\check{U}(s) = [\cos(k_{so}s) + i \sin(k_{so}s) \hat{\sigma}_n(s)]. \quad (\text{Б.3})$$

Из формы уравнений (Б.2) следует, что преобразованная волновая функция квазичастиц и ее производная непрерывна при $s = 0$, что позволяет использовать стандартную конечно-разностную схему для аппроксимации дифференциального оператора в задаче (Б.2). С другой стороны, граничные условия для исходной задачи (2.1) включают в себя непрерывность волновой функции на контакте а

также скачок производной

$$\left. \frac{d\Psi}{ds} \right|_{+0} - \left. \frac{d\Psi}{ds} \right|_{-0} = \check{M}\Psi(0) , \quad (\text{B.4a})$$

$$\check{M} = ik_{so} [\hat{\sigma}_x \sin \chi - \hat{\sigma}_y (\cos \chi - 1)] . \quad (\text{B.4б})$$

Данные выражения показывают, что ступенчатый профиль геометрической фазы приводит к появлению дополнительного спин-зависящего барьера для квазичастиц, и параметр силы барьера определяется константой спин-орбитального взаимодействия и разностью геометрических фаз.

Далее следует краткое описание конечно-разностной схемы, которая была использована для вычисления спектра квазичастиц. Вводя пространственную сетку $s_j = aj$, где a - шаг сетки, а j - целое число, конечно-разностная аппроксимация спектральной задачи (B.2) имеет следующий вид

$$\sum_{l'=1}^N \check{\mathcal{H}}_{ll'} \check{\Psi}(s_{l'}) = E \check{\Psi}(s_l) , \quad (\text{B.5a})$$

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{H}}_{ll'} = & \{ [2t - \tilde{\mu}(s_l)] \check{\tau}_z + \mathbf{h}(s_l) [\check{U}^\dagger(s_l) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \check{U}(s_l)] \\ & + |\Delta| [\check{\tau}_x \cos \varphi(s_l) - \check{\tau}_y \sin \varphi(s_l)] \} \delta_{l,l'} \\ & - t \check{\tau}_z (\delta_{l,l'-1} + \delta_{l,l'+1}) . \end{aligned} \quad (\text{B.5б})$$

Здесь N - общее число точек сетки, и $t = \hbar^2/2ma^2$. В численных расчетах длина отдельного сегмента искривленного нанопровода $\ell = 44\sqrt{\hbar/m|\Delta|}$, было взято $N = 1000$ точек и вычислено 400 положительных собственных значений матрицы (B.5б). Для того, чтобы исключить влияние размерных эффектов, была произведена проверка устойчивости полученных результатов при увеличении длины нанопровода. Удвоение ℓ при той же плотности точек приводит к небольшому отклонению критического сверхтока в несколько процентов и к несущественному отклонению аномальной фазы.

Приложение В

В.1 Вывод нормальной функции Грина для бислоя сверхпроводник-ферромагнетик со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы

В работе используется следующее определение для мацубаровских функций Грина:

$$\check{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = - \langle T_\tau \check{\psi}(\mathbf{x}_1) \check{\psi}^\dagger(\mathbf{x}_2) \rangle . \quad (\text{B.1})$$

Здесь $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \tau)$, τ - переменная мнимого времени в мацубаровской технике, T_τ - оператор временного упорядочения, $\check{\psi}(\mathbf{x}) = [\psi_\uparrow(\mathbf{x}), \psi_\downarrow(\mathbf{x}), -\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{x}), \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{x})]^\text{T}$, and $\psi_\sigma^\dagger(\mathbf{x})$, $\psi_\sigma(\mathbf{x})$ - фермионные операторы рождения и уничтожения в мацубаровском представлении, соответственно. Уравнения Горькова удобно записать в частотном представлении

$$\check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_0^{1/T} \check{G}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau , \quad (\text{B.2})$$

где $\tau = \tau_1 - \tau_2$, $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$ - мацубаровская частота, T - температура, и n - целое число.

Целью данного раздела является вывод нормальной функции Грина в сверхпроводящем слое. Отправной точкой служит уравнения Горькова (3.5). Предполагая трансляционную инвариантность в плоскости слоев

$$\check{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int \frac{d^2 \mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \check{G}(z, z') e^{i\mathbf{k}_\parallel(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} , \quad (\text{B.3})$$

уравнения для фурье компонент функции Грина при $z, z' > 0$ имеют вид

$$\hat{G}_s^{-1}(z) \hat{G}_s(z, z') = \delta(z - z') , \quad (\text{B.4a})$$

$$\hat{G}_s^{-1}(z) = i\omega_n + \frac{1}{2m_s} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_s - \frac{\mathbf{k}_\parallel^2}{2m_s} . \quad (\text{B.4b})$$

Решения (B.4), удовлетворяющие жестким граничным условиям на границе сверхпроводник/вакуум ($z = d_s$) можно записать следующим образом:

$$\hat{G}_{s+}(z, z') \equiv \hat{G}_s(z > z') = \hat{A}_+ \sin[k_s(z - d_s)] , \quad (\text{B.5a})$$

$$\hat{G}_{s-}(z, z') \equiv \hat{G}_s(z < z') = \hat{A}_- \sin[k_s(z - d_s)] + \hat{B}_- \cos[k_s(z - d_s)] . \quad (\text{B.5b})$$

Здесь

$$k_s = \sqrt{2m_s(i\omega_n + \mu_s) - \mathbf{k}_{\parallel}^2} , \quad (\text{B.6})$$

а \hat{A}_{\pm} и \hat{B}_{\pm} - 2×2 матрицы, содержащие произвольные постоянные. Накладывая граничные условия при совпадающих аргументах

$$\hat{G}_{s+}(z', z') = \hat{G}_{s-}(z', z') , \quad (\text{B.7a})$$

$$\left. \frac{\partial \hat{G}_{s+}}{\partial z} \right|_{z=z'} - \left. \frac{\partial \hat{G}_{s-}}{\partial z} \right|_{z=z'} = 2m_s \quad (\text{B.7b})$$

на решения (B.5), мы получаем систему уравнений

$$\hat{A}_+ \sin[k_s(z' - d_s)] = \hat{A}_- \sin[k_s(z' - d_s)] + \hat{B}_- \cos[k_s(z' - d_s)] , \quad (\text{B.8a})$$

$$\hat{A}_+ \cos[k_s(z' - d_s)] - \hat{A}_- \cos[k_s(z' - d_s)] + \hat{B}_- \sin[k_s(z' - d_s)] = \frac{2m_s}{k_s} . \quad (\text{B.8b})$$

Уравнения (3.5) для фурье компонент электронной функции Грина в ферромагнетике ($z < 0$, $z' > 0$)

$$\hat{G}_f^{-1}(z) \hat{G}_f(z, z') = 0 , \quad (\text{B.9a})$$

$$\hat{G}_f^{-1}(z) = i\omega_n + \frac{1}{2m_f} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu_f - \frac{\mathbf{k}_{\parallel}^2}{2m_f} - h\hat{\sigma}_x - \alpha(k_x\hat{\sigma}_y - k_y\hat{\sigma}_x) . \quad (\text{B.9b})$$

Решения (B.9), удовлетворяющие жестким граничным условиям на границе ферромагнетик/вакуум ($z = -d_f$) ищутся в виде

$$\hat{G}_f(z, z') = \sum_{\eta=\pm} \sin[k_{f\eta}(z + d_f)] \hat{g}_{\eta} \hat{C}_{\eta} . \quad (\text{B.10})$$

Здесь η - индекс геликоидальной подзоны,

$$k_{f\eta}^2 = 2m_f \left[i\omega_n + \mu_f - \eta \sqrt{(h - \alpha k_y)^2 + (\alpha k_x)^2} \right] - \mathbf{k}_{\parallel}^2 , \quad (\text{B.11a})$$

$$\hat{g}_{\eta} = \begin{pmatrix} 1 & \eta e^{-i\beta_-} \\ \eta e^{i\beta_-} & 1 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.11b})$$

$$\beta_- = \arctan \left(\frac{\alpha k_x}{h - \alpha k_y} \right) , \quad (\text{B.11b})$$

и \hat{C}_\pm - диагональные 2×2 матрицы с постоянными коэффициентами. Сшивая функции Грина (B.56) и (B.10) на границе сверхпроводник/ферромагнетик ($z = 0$)

$$\hat{G}_{s-}(0, z') = \hat{G}_f(0, z') , \quad (\text{B.12a})$$

$$\frac{1}{m_s} \frac{\partial \hat{G}_{s-}}{\partial z} \Big|_{z=0} - \frac{1}{m_f} \frac{\partial \hat{G}_f}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2U_0 \hat{G}_{s-}(0, z') , \quad (\text{B.12б})$$

мы получаем второй набор уравнений

$$-\hat{A}_- \sin(k_s d_s) + \hat{B}_- \cos(k_s d_s) = \sum_{\eta} \sin(k_{f\eta} d_f) \hat{g}_{\eta} \hat{C}_{\eta} , \quad (\text{B.13a})$$

$$\begin{aligned} & \hat{A}_- [\cos(k_s d_s) + Z \sin(k_s d_s)] + \hat{B}_- [\sin(k_s d_s) \\ & - Z \cos(k_s d_s)] = \sum_{\eta} (v_{f\eta}/v_s) \cos(k_{f\eta} d_f) \hat{g}_{\eta} \hat{C}_{\eta} . \end{aligned} \quad (\text{B.13б})$$

Решая (B.8) и (B.13) относительно \hat{A}_\pm , \hat{B}_- и подставляя соответствующие выражения в (B.5), мы получаем

$$\hat{G}_s(z < z') \equiv \hat{G}_{s-}(z, z') = \frac{\sin[k_s(z' - d_s)]}{v_s} \sum_{\eta=\pm} \frac{\sin(k_s z + \phi_{\eta})}{\sin(k_s d_s + \phi_{\eta})} \begin{pmatrix} 1 & \eta e^{-i\beta_-} \\ \eta e^{i\beta_-} & 1 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.14a})$$

$$\hat{G}_s(z > z') = \hat{G}_{s-}(z', z) , \quad (\text{B.14б})$$

а фазы рассеяния для электронов ϕ_{η} определяются выражением (3.11) в основном тексте.

Заметим, что функция Грина для дырочных возбуждений может быть получена из приведенных выше выражений с помощью соотношения

$$\hat{G}(i\omega_n, h) = -\hat{G}(-i\omega_n, -h) . \quad (\text{B.15})$$

Используя (B.14) и (B.15), мы получаем

$$\hat{G}_s(z < z') \equiv \hat{G}_{s-}(z, z') = \frac{\sin[\bar{k}_s(z' - d_s)]}{\bar{v}_s} \sum_{\eta=\pm} \frac{\sin(\bar{k}_s z + \bar{\phi}_{\eta})}{\sin(\bar{k}_s d_s + \bar{\phi}_{\eta})} \begin{pmatrix} -1 & \eta e^{i\beta_+} \\ \eta e^{-i\beta_+} & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{B.16a})$$

$$\hat{G}_s(z > z') = \hat{G}_{s-}(z', z) , \quad (\text{B.16б})$$

где $\bar{k}_s(\omega_n) = k_s(-\omega_n)$, $\bar{v}_s = \bar{k}_s/m_s$, и $\text{tg}(\beta_+) = \alpha k_x/(h + \alpha k_y)$, а фазы рассеяния для дырок $\bar{\phi}_{\eta}$ определяются уравнением (3.13).

В.2 Вывод линеаризованного уравнения самосогласования (3.8)

Данный раздел посвящен выводу уравнения на критическую температуру сверхпроводящего перехода. Для этой цели необходимо вычислить аномальную функцию Грина в сверхпроводящем слое в первом порядке по функции щели. В случае однородного сверхпроводящего параметра порядка

$$\begin{aligned}\hat{F}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= -\Delta^* \int d\mathbf{r}' \hat{G}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{G}_s(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= -\Delta^* \int \frac{d^2 \mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \int_0^{d_s} dz' \hat{G}_s(z, z') \hat{G}_s(z', z),\end{aligned}\quad (\text{B.17})$$

Корреляционные функции в несверхпроводящем состоянии $\hat{G}_s(z, z')$ и $\hat{G}_s^*(z, z')$ даны уравнениями (B.14) и (B.16). В пределе $k_F \xi_s \gg 1$ (k_F - импульс Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя, и ξ_s - сверхпроводящая длина когерентности) интеграл по толщине S слоя может быть записан в виде

$$\int_0^{d_s} dz' \hat{G}_s^{(0)}(z, z') \hat{G}_s^{(0)}(z', z) = \sum_{\eta, \eta' = \pm} \varkappa^{-1} [I_{\eta\eta'}^{\text{slow}}(z) + I_{\eta\eta'}^{\text{fast}}(z)] \hat{K}_{\eta\eta'}, \quad (\text{B.18})$$

где

$$\varkappa = 4\bar{v}_s v_s \delta k \sin(\bar{k}_s d_s + \bar{\phi}_\eta) \sin(k_s d_s + \phi_{\eta'}), \quad (\text{B.19a})$$

$$\begin{aligned}I_{\eta\eta'}^{\text{slow}}(z) &= \cos[\delta k(z - d_s)] [\sin(\delta k z + \delta \phi_{\eta\eta'}) - \sin(\delta \phi_{\eta\eta'})] \\ &\quad - \cos(\delta k z + \delta \phi_{\eta\eta'}) \sin[\delta k(z - d_s)],\end{aligned}\quad (\text{B.19б})$$

$$\begin{aligned}I_{\eta\eta'}^{\text{fast}}(z) &= -\cos[\Sigma k(z - d_s)] [\sin(\delta k z + \delta \phi_{\eta\eta'}) - \sin(\delta \phi_{\eta\eta'})] \\ &\quad + \cos(\Sigma k z + \Sigma \phi_{\eta\eta'}) \sin[\delta k(z - d_s)],\end{aligned}\quad (\text{B.19в})$$

и

$$\hat{K}_{\eta\eta'} = \begin{bmatrix} -1 + \eta\eta' e^{i(\beta_+ + \beta_-)} & \eta e^{i\beta_+} - \eta' e^{-i\beta_-} \\ \eta e^{-i\beta_+} - \eta' e^{i\beta_-} & -1 + \eta\eta' e^{-i(\beta_+ + \beta_-)} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.20})$$

В (B.19) введены следующие обозначения: $\delta k = (\bar{k}_s - k_s)$, $\Sigma k = \bar{k}_s + k_s$, $\delta \phi_{\eta\eta'} = \bar{\phi}_\eta - \phi_{\eta'}$, и $\Sigma \phi_{\eta\eta'} = \bar{\phi}_\eta + \phi_{\eta'}$. Отметим, что $\Sigma k \sim k_F$ в то время, как $\delta k \sim 1/\xi_s$. Таким образом, можно выделить медленную огибающую аномальной функции Грина $\hat{\mathcal{F}}_s^\dagger(z)$, пренебрегая слагаемыми $\propto I_{\eta\eta'}^{\text{fast}}(z)$ в (B.18), так как они меняются на масштабе фермиевской длины волны в нормальном металле.

В случае тонкой сверхпроводящей пленки величины $\delta k z$ и $\delta k(z - d_s)$ порядка $d_s/\xi_s \ll 1$, что позволяет использовать разложение по малому параметру в (B.196). Подставляя ведущий член данного разложения

$$I_{\eta\eta'}^{\text{slow}}(z) \approx d_s \delta k \cos(\delta\phi_{\eta\eta'}) , \quad (\text{B.21})$$

в (B.17) и (B.18), мы получаем следующее выражение для аномальной функции

$$\hat{\mathcal{F}}_s^\dagger = -\Delta^* \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \sum_{\eta, \eta'=\pm} \frac{d_s \cos(\bar{\phi}_\eta - \phi_{\eta'}) \hat{K}_{\eta\eta'}}{4\bar{v}_s v_s \sin(\bar{k}_s d_s + \bar{\phi}_\eta) \sin(k_s d_s + \phi_{\eta'})} . \quad (\text{B.22})$$

Далее следует вывод линеаризованного уравнения самосогласования (3.8). Рассмотрим сперва случай $\alpha = 0$, для которого $\beta_\pm = 0$, а фазы рассеяния зависят только от модуля продольного импульса. Для простоты мы пренебрежем зависимостями фаз рассеяния от частоты, таким образом, $\text{tg}(\bar{\phi}_\eta)$ и $\text{tg}(\phi_\eta)$ - действительные числа. В пределе $k_F \xi_s \gg 1$ основной вклад в интеграл (B.22) происходит от состояний с $k_\parallel < k_F$. Таким образом, интеграл в (B.22) может быть преобразован

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^2\mathbf{k}_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{d_s \cos(\delta\phi_{\eta\eta'})}{4\bar{v}_s v_s \sin(\bar{k}_s d_s + \bar{\phi}_\eta) \sin(k_s d_s + \phi_{\eta'})} \\ & \approx \int_0^{k_F} \frac{dk_z (m_s d_s / 4\pi v_z) \cos(\delta\phi_{\eta\eta'})}{[\cos(\delta k d_s + \delta\phi_{\eta\eta'}) - \cos(\Sigma k d_s + \Sigma\phi_{\eta\eta'})]} . \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

В данных выражениях $k_z = \sqrt{k_F^2 - k_\parallel^2}$, $\delta k \approx -2i\omega_n/v_z$, $\Sigma k \approx 2k_z$, и $v_z = k_z/m_s$. Следующим шагом делается замена переменных

$$k_z = \frac{\pi n_z}{d_s} - \frac{\Sigma\phi_{\eta\eta'}}{2d_s} + t , \quad (\text{B.24})$$

где $n_z \in [1, N_s]$ - целое число, N_s - целая часть $k_F d_s/\pi$, и t меняется от нуля до π/d_s . В дальнейшем, мы будем считать, что фазы рассеяния и поляризационные углы являются медленными функциями k_z на масштабе π/d_s . Данное предположение справедливо, когда плотность состояний на уровне Ферми в несверхпроводящем состоянии S слоя на уровне Ферми много больше, чем плотность состояний в примыкающем слое. Используя (B.24), интеграл по импульсу в (B.23) преобразуется к виду

$$\sum_{n_z=1}^{N_s} \frac{m_s d_s \cos(\delta\phi_{\eta\eta'})}{4\pi v_z} \int_0^{\pi/d_s} \frac{dq}{[\cos(\zeta) - \cos(2td_s)]} . \quad (\text{B.25})$$

Здесь $\zeta = \delta k d_s + \delta \phi_{\eta\eta'}$, и мы приравниваем k_z к $\pi n_z / d_s$ во всех медленно меняющихся функциях импульса. Производя интегрирование в (B.25), мы получаем

$$\sum_{n_z=1}^{N_s} \frac{-i m_s \cos(\delta \phi_{\eta\eta'}) \text{sign}(\omega_n)}{4 v_z \sin(\delta k d_s + \delta \phi_{\eta\eta'})} \approx \frac{m_s}{8 d_s} \sum_{n_z=1}^{N_s} \frac{\text{sign}(\omega_n)}{[\omega_n + i(\hbar v_z / 2 d_s) \text{tg}(\delta \phi_{\eta\eta'})]} . \quad (\text{B.26})$$

В случае $k_F d_s \gg 1$ можно перейти мы перейти к континуальному пределу и заменить сумму по n_z в (B.26) на интеграл

$$\sum_{n_z=1}^{N_s} \rightarrow \frac{d_s}{\pi} \int_0^{k_F} dk_z = \frac{d_s k_F}{\pi} \int_0^1 du . \quad (\text{B.27})$$

Используя (B.22), (B.26) и (B.27), мы получаем аномальную функцию Грина

$$\hat{\mathcal{F}}_s^\dagger = -\Delta^* \frac{\pi \nu}{4} \int_0^1 du \sum_{\eta, \eta'=\pm} \frac{\text{sign}(\omega_n)}{\omega_n + i \rho_{\eta\eta'}(u)} \begin{pmatrix} -1 + \eta\eta' & \eta - \eta' \\ \eta - \eta' & -1 + \eta\eta' \end{pmatrix} , \quad (\text{B.28a})$$

$$\rho_{\eta\eta'}(u) = \frac{\hbar v_F}{2 d_s} u \text{tg} [\bar{\phi}_\eta(u) - \phi_{\eta'}(u)] , \quad (\text{B.28b})$$

Подстановка выражения (B.28) в (3.7) дает линейризованное уравнение самосогласования

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi T}{2} \sum_{|\omega_n| < \Omega} \text{sign}(\omega_n) \int_0^1 du \sum_{\eta \neq \eta'} \frac{1}{\omega_n + i \rho_{\eta\eta'}} \quad (\text{B.29})$$

где $\nu = m_s k_F / 2\pi^2$ - плотность состояний на уровне Ферми на одну проекцию спина в несверхпроводящем состоянии S слоя, и $\lambda = V\nu$ - безразмерная константа спаривания.

В случае конечной константы спин-орбитального взаимодействия компоненты волнового вектора k_x и k_y суть две независимые переменные поляризационных углов β_\pm , фаз рассеяния $\bar{\phi}_\eta$, ϕ_η и распаривающих факторов $\rho_{\eta\eta'}$. Чтобы обобщить предыдущие результаты, мы вводим $k_x = k_\parallel \cos(\varphi)$, $k_y = k_\parallel \sin(\varphi)$ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), а затем проводим интегрирование по k_\parallel в (B.22). В результате мы получаем аномальную функцию Грина

$$\hat{\mathcal{F}}_s^\dagger = -\Delta^* \frac{\pi \nu}{4} \sum_{\eta, \eta'=\pm} \text{sign}(\omega_n) \left\langle \frac{\hat{K}_{\eta\eta'}(\mathbf{k})}{\omega_n + i \rho_{\eta\eta'}(\mathbf{k})} \right\rangle_{\mathbf{k}} \quad (\text{B.30})$$

Подставляя (B.30) в выражение (3.7) в основном тексте, мы получаем уравнение на критическую температуру сверхпроводящего перехода

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\pi T}{2} \sum_{|\omega_n| < \Omega} \text{sign}(\omega_n) \sum_{\eta, \eta'=\pm} \left\langle \frac{\delta_{\eta\eta'} w_{\text{intra}} + (1 - \delta_{\eta\eta'}) w_{\text{inter}}}{\omega_n + i \rho_{\eta\eta'}} \right\rangle_{\mathbf{k}} . \quad (\text{B.31})$$

Отметим, что получившиеся уравнения (B.30) и (B.31) также справедливы, когда фазы рассеяния зависят от мацубаровской частоты. Для того, чтобы это показать, вычислим зараздывающую (R) и опережающую (A) аномальные функции Грина. В представлении действительных частот $\text{tg}(\phi_\eta)$ и $\text{tg}(\bar{\phi}_\eta)$ - действительные числа, и вывод функций Грина производится аналогично рассмотренному ранее случаю. В результате

$$\hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger R,A}(E) = \mp \Delta^* \frac{i\pi\nu}{4} \sum_{\eta,\eta'=\pm} \left\langle \frac{\hat{K}_{\eta\eta'}(\mathbf{k})}{E \pm i0^+ - \rho_{\eta\eta'}(E,\mathbf{k})} \right\rangle_{\mathbf{k}}. \quad (\text{B.32})$$

Используя (B.32) и соотношения

$$\hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger R}(i\omega_n) = \hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger}(\omega_n) \text{ for } \omega_n > 0, \quad (\text{B.33a})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger A}(i\omega_n) = \hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger}(\omega_n) \text{ for } \omega_n < 0, \quad (\text{B.33б})$$

мы получаем мацубаровские функции Грина (B.30).

Наконец, мы объясняем как (B.31) преобразуется к виду (3.8) в основном тексте. Сперва добавим и вычтем из (B.31) правую часть уравнения самосогласования от объемного сверхпроводника, исключая, таким образом обрезание на дебаевской частоте в сумме по частотам. Затем, используя симметричные соотношения для распаривающих факторов

$$\rho_{\eta\eta'}(-\omega_n) = \rho_{\eta\eta'}^*(\omega_n), \quad (\text{B.34})$$

мы сводим сумму по всем частотам к сумме только по положительным. В результате мы получаем уравнение (3.8) в основном тексте.

В конце данного раздела приведен вывод уравнения самосогласования для неоднородной функции щели (3.4) с $q \neq 0$. Для нахождения аномальной функции Грина необходимо вычислить интеграл

$$\begin{aligned} \hat{F}_s(\mathbf{r},\mathbf{r}) &= - \int d\mathbf{r}' \hat{G}_s(\mathbf{r},\mathbf{r}') \Delta^*(\mathbf{r}') \hat{G}_s(\mathbf{r}',\mathbf{r}) \quad (\text{B.35}) \\ &= -|\Delta| e^{-iqy} \int_0^{d_s} dz' \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \hat{G}_s(z,z',k_x,k_y - q/2) \hat{G}_s(z',z,k_x,k_y + q/2). \end{aligned}$$

Выполняя вычисления аналогичные случаю однородной щели, мы получаем следующее выражение для огибающей

$$\hat{\mathcal{F}}_s^{\dagger}(y) = -|\Delta| e^{-iqy} \int \frac{d^2\mathbf{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} \sum_{\eta,\eta'=\pm} \frac{d_s \cos(\bar{\phi}_\eta - \phi_{\eta'}) \hat{K}_{\eta\eta'}}{4\bar{v}_s v_s \sin(\bar{k}_s d_s + \bar{\phi}_\eta) \sin(k_s d_s + \phi_{\eta'})}. \quad (\text{B.36})$$

Заметим, что в отличие от предыдущего случая

$$k_s = \sqrt{2m_s(i\omega_n + \mu_s) - k_x^2 - (k_y + q/2)^2}, \quad (\text{B.37a})$$

$$\bar{k}_s = \sqrt{2m_s(-i\omega_n + \mu_s) - k_x^2 - (k_y - q/2)^2}, \quad (\text{B.37б})$$

также необходимо сделать ряд замен

$$\bar{\phi}_\eta(k_x, k_y) \rightarrow \bar{\phi}_\eta(k_x, k_y - q/2), \quad (\text{B.38a})$$

$$\phi_\eta(k_x, k_y) \rightarrow \phi_\eta(k_x, k_y + q/2), \quad (\text{B.38б})$$

$$\beta_+(k_x, k_y) \rightarrow \beta_+(k_x, k_y - q/2), \quad (\text{B.38в})$$

$$\beta_-(k_x, k_y) \rightarrow \beta_-(k_x, k_y + q/2). \quad (\text{B.38г})$$

Предполагая $|q| \ll k_F$ и используя разложения

$$\bar{k}_s + k_s \approx 2k_z, \quad (\text{B.39a})$$

$$\bar{k}_s - k_s \approx q \frac{k_y}{k_z} - \frac{2i\omega_n}{v_z}, \quad (\text{B.39б})$$

мы проводим интегрирование по продольному импульсу в (B.36). В результате, линеаризованное уравнение самосогласования имеет форму (3.8) с вышеуказанными заменами в фазах рассеяния и поляризационных углах, а также с модифицированными распаривающими факторами

$$\rho_{\eta\eta'}(q) = \frac{v_y q}{2} + \frac{v_z}{2d_s} \text{tg} [\bar{\phi}_\eta(q) - \phi_{\eta'}(q)]. \quad (\text{B.40a})$$