

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР**

На правах рукописи

**Курин Владислав Викторович**

**Феноменологическая теория сверхпроводимости**

Учебное пособие для студентов 4,5 курсов Радиофизического факультета (РФ)  
и Высшей школы общей и прикладной физики (ВШОПФ)  
ННГУ им. Лобачевского

г.Нижний Новгород, 2019 г.



# Содержание

Краткое введение	3
<b>1 История открытия сверхпроводимости, основные понятия и экспериментальные факты</b>	<b>4</b>
1.1 Открытие сверхпроводимости . . . . .	4
1.2 Эффект Мейсснера-Оксенфельда . . . . .	6
<b>2 Элементарные электродинамические следствия из существования эффекта Мейсснера</b>	<b>7</b>
<b>3 Сверхпроводник в магнитном поле. Аналогия с магнетиком.</b>	<b>8</b>
3.1 Уравнения Максвелла. Индукции и напряженности. . . . .	9
3.2 Сверхпроводник во внешнем магнитном поле. . . . .	10
3.2.1 Длинный узкий цилиндр в магнитном поле, параллельном образующей . . . . .	11
3.2.2 Цилиндр в магнитном поле, перпендикулярном образующей . . . . .	11
3.2.3 Сверхпроводящий шар в магнитном поле . . . . .	13
<b>4 Элементарная термодинамика сверхпроводящего перехода</b>	<b>15</b>
4.1 Краткое изложение основных понятий термодинамики . . . . .	15
4.2 Принцип возрастания энтропии . . . . .	15
4.3 Выбор термодинамической системы и окружения. Выражение для работы и термодинамических потенциалов. . . . .	17
4.4 Равновесие нормальной и сверхпроводящей фаз . . . . .	19
4.5 Промежуточное состояние сверхпроводника . . . . .	21
<b>5 Уравнение Лондонов и двухжидкостная гидродинамика сверхпроводников</b>	<b>22</b>
5.1 Вариационный вывод уравнения Лондонов . . . . .	22
5.2 Две простые одномерные задачи на уравнение Лондонов . . . . .	23
5.2.1 Пленка во внешнем магнитном поле . . . . .	23
5.2.2 Пленка с током . . . . .	24
5.3 Двухжидкостная гидродинамика сверхпроводников. Динамический вывод уравнения Лондонов . . . . .	24
5.4 Поверхностный импеданс сверхпроводника и глубина скин-слоя . . . . .	26
<b>6 Феноменологическая теория Гинзбурга-Ландау</b>	<b>28</b>
6.1 Идея общей теории фазовых переходов. Структура параметра порядка для сверхпроводника. Свободная энергия для пространственно-однородного сверхпроводника . . . . .	28
6.2 Обобщение на пространственно-неоднородный случай . . . . .	31
6.3 Эффект близости . . . . .	33
6.4 Калибровочная инвариантность и взаимодействие с магнитным полем. Уравнения Гинзбурга-Ландау. . . . .	35
6.5 Различные формы записи тока в теории Гинзбурга-Ландау. Связь с теорией Лондонов.	37
6.6 Система единиц Гинзбурга-Ландау. Обезразмеривание уравнений. . . . .	38
6.7 Действительная форма уравнений Гинзбурга-Ландау . . . . .	40
<b>7 Простейшие приложения теории Гинзбурга-Ландау</b>	<b>42</b>
7.1 Квантование потока . . . . .	42
7.2 Критическое поле тонкой пленки . . . . .	44
7.3 Критический ток тонких пленок и проволок. Ток распаривания . . . . .	46
7.4 Эксперимент Литтла-Паркса . . . . .	49
7.5 Поверхностное натяжение равновесной N-S границы . . . . .	50

<b>8</b>	<b>Сверхпроводники второго рода</b>	<b>56</b>
8.1	Верхнее критическое поле . . . . .	56
8.2	Смешанное состояние вблизи $H_{c2}$ . Задача Абрикосова. . . . .	58
8.3	Структура одиночного вихря. Нижнее критическое поле. . . . .	61
<b>9</b>	<b>Эффект Джозефсона</b>	<b>66</b>
9.1	Вывод формулы для джозефсоновского тока . . . . .	66
9.2	Нестационарный эффект Джозефсона . . . . .	68
9.3	Влияние магнитного поля на критический ток контакта . . . . .	70
9.4	Распределенный джозефсоновский контакт . . . . .	71
9.4.1	Экранирование слабого магнитного поля в контакте. Джозефсоновская длина	73
9.4.2	Джозефсоновские вихри . . . . .	74
9.4.3	Волны в длинном джозефсоновском контакте . . . . .	77
9.5	Квантовая интерференция и квантовые интерферометры . . . . .	78
9.5.1	Одноконтный SQUID . . . . .	79
9.5.2	Двухконтный SQUID . . . . .	81

## Краткое введение

Предлагаемое учебное пособие базируется на курсе лекций по физике сверхпроводников, читаемых мной для студентов радиофизического факультета и ВШОПФ с 1990 года. В 1986 году были найдены новые материалы, демонстрирующие высокотемпературную сверхпроводимость, что вызвало большой интерес не только у физиков, традиционно занимающихся физикой твердого тела, но и у широкого круга специалистов занимающихся электродинамикой, электроникой и физикой нелинейных явлений. Этот интерес связан с возможностью применения новых сверхпроводников для приема, генерации и усиления СВЧ и дальнего ИК излучения, сверхбыстрой обработки информации, сверхчувствительных измерений, а также в системах транспортировки и накопления электрической энергии. Кроме того, открытие высокотемпературной сверхпроводимости и попытки понять её природу стимулировали развитие фундаментальных исследований электронных и электродинамических свойств новых сверхпроводников.

Радиофизический факультет ННГУ и ВШОПФ не остались в стороне от этой маленькой революции и начали подготовку специалистов для работы во вновь открывшейся области фундаментальной и прикладной физики. В настоящее время выпускники ВШОПФ и радиофака успешно работают в этой новой перспективной области физики в ИПФ и ИФМ РАН, а также в ведущих научных центрах США и западной Европы.

Пособие состоит из двух частей, каждая из 14 лекций. В первой части излагаются основные экспериментальные факты, элементарная термодинамика и электродинамика теории сверхпроводников, феноменологическая теория сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау и на основе этих теоретических представлений дается описание широкого круга физических явлений в сверхпроводниках. Вторая часть посвящена изложению микроскопической теории сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера.

В работе над данным пособием большую помощь оказала мне моя жена, Курина Людмила Евгеньевна, которой я выражаю искреннюю благодарность. Я также признателен заведующему кафедрой электродинамики радиофизического факультета Таланову Владимиру Ильичу, инициировавшему написание данного учебного пособия.

# 1 История открытия сверхпроводимости, основные понятия и экспериментальные факты

## План лекции

- История развития физики сверхпроводников, основные этапы
- Основные понятия и экспериментальные факты физики сверхпроводников, критический ток, критическое магнитное поле, фазовая диаграмма сверхпроводника
- Эффект Мейсснера-Оксенфельда
- Элементарные следствия из существования эффекта Мейсснера-Оксенфельда

## 1.1 Открытие сверхпроводимости

Явление сверхпроводимости было открыто в 1911 году голландским физиком и инженером Камерлинг-Оннесом. Он был первым, кому удалось создать мощную холодильную установку и достичь рекордно низкой, по тем временам, температуры кипения гелия-4 ( $He_4$ ), которая равна 4,2 K. Помещая в криостат различные вещества и измеряя зависимость сопротивления от температуры Камерлинг-Оннес обнаружил, что у некоторых металлов при определенной температуре сопротивление довольно резко обращается в ноль. Характерные зависимости сопротивления металлов от температуры качественно изображены на Рис.1 Для того, чтобы исключить сопротивление подводя-

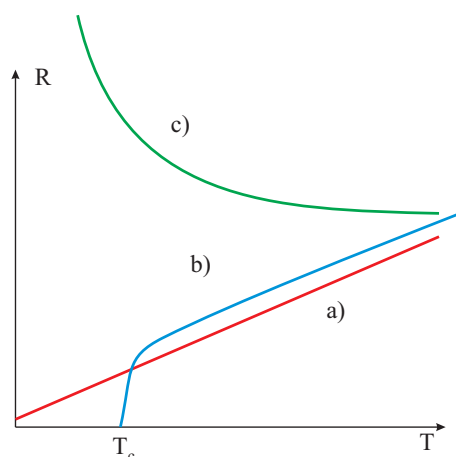


Рис. 1: Характерная зависимость сопротивления металлов и полупроводников от температуры. а)- металл с конечным остаточным сопротивлением, б) - сверхпроводящий металл, с)- полупроводник

щих проводов и зарегистрировать ноль сопротивления с максимальной точностью использовалась, так называемая, четырех зондовая схема измерения сопротивления, когда контакты проводов, идущие к вольтметру, располагаются непосредственно на образце. Схема показана на Рис.2 Обращение сопротивления в ноль происходит при некоторой конечной температуре, называемой критической. Переход в сверхпроводящее состояние является фазовым переходом, при этом переходе меняется не только сопротивление образца, но и другие физические, электромагнитные и термодинамические, характеристики, такие, например, как магнитная восприимчивость и теплоемкость.

Типичные значения критической температуры сверхпроводников, известных до 1986 года, составляет  $\approx 10K$ . Конкретные значения критических температур  $T_c$  для некоторых низкотемпературных сверхпроводников (известных до 1986г.)

W -  $T_c \approx 0,015^\circ$ ,

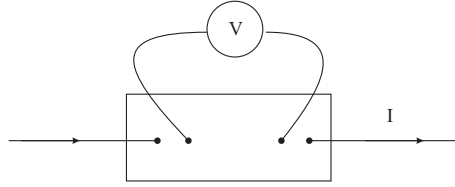


Рис. 2: 4-х зондовая схема измерения сопротивления

Hg -  $T_c \simeq 4^\circ$ ,  
 Nb -  $T_c \simeq 9,25^\circ$ .

Рекордное высокое значение температуры  $T_c$  было достигнуто для  $Nb_3Ge$  -  $T_c \simeq 23^\circ$ .

В 1986 Беднорцем и Мюллером было найден новый класс сложных соединений, включающих группу  $CuO_2$  и обладающие существенно более высокой критической температурой  $T_c$ :

$La_{2-x}Sr_xCuO_4$  -  $T_c \simeq 30 \div 40^\circ$ ,

$Y_1Ba_2Cu_3O_7$  -  $T_c \simeq 90^\circ$ ,

$Bi_2Sr_2Ca_{n-1}Cu_nO_4$  -  $T_c$  от  $80^\circ$  ( $n = 2$ ), от  $110^\circ$  ( $n = 3$ ),

$Tl_2Ba_2Ca_nCu_{n+1}O_4$  -  $T_c$  от  $125^\circ$  ( $n = 3$ ), от  $165^\circ$  ( $n = 4$ ).

Сверхпроводники этого типа в настоящее время называются высокотемпературными сверхпроводниками. В 2006 году был открыт новый широкий класс сверхпроводящих материалов, так называемых сверхпроводников на основе железа. Их критическая температура достигает 55K, и их тоже можно причислить к высокотемпературным сверхпроводникам. Итак, можно заключить, что сверхпроводящее состояние - это новое состояние вещества, так же, как и газообразное, жидкое, твердое. Это состояние металла. Говорят, что нормальный металл (N) переходит в сверхпроводящее состояние (S). Один и тот же металл, в зависимости от внешних условий, может находиться в разных фазах, а переход между ними называется фазовым переходом.

Фазовый переход из нормального в сверхпроводящее состояние (N-S переход) может иметь место и при наложении магнитного поля. Величина поля, при котором происходит фазовый переход называется критическим магнитным полем  $H_c$ . При этом значении поля сверхпроводящее и нормальное состояние находятся в равновесии. Естественно, что величина критического магнитного поля зависит от температуры. График зависимости  $H_c(T)$  на Рис.3 разделяет плоскость  $H, T$  на две области, в одной из которых реализуется сверхпроводящее состояние, в другой - нормальное. Эта картинка называется фазовой диаграммой. На рис.3 показаны два типа возможных фазовых диаграмм сверхпроводников. Сверхпроводники с фазовой диаграммой, показанной на Рис.3 (а), называются

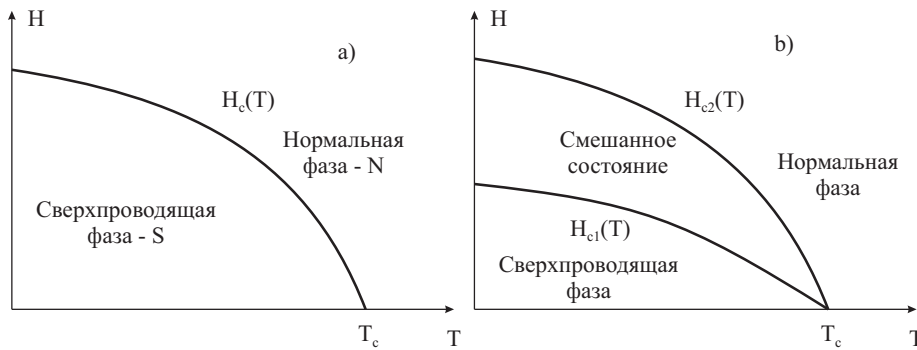


Рис. 3: Типичные фазовые диаграммы сверхпроводников. Левый график-сверхпроводник 1 рода, Правый-сверхпроводник 2 рода.

сверхпроводниками первого рода. К ним относятся сверхпроводники из чистых элементов, кроме  $Nb$ . Как мы увидим позже, для таких сверхпроводников существует в окрестности  $H_c(T)$  устойчи-

вая NS граница с положительным поверхностным натяжением. Все сверхпроводники из сложных соединений и  $Nb$  - сверхпроводники 2-ого рода. Их типичная фазовая диаграмма изображена на Рис.3 (b), она отличается от Рис.3 (a) тем, что линия  $H_c(T)$  расщеплена на две  $H_{c1}$  и  $H_{c2}$  и при промежуточных магнитных полях  $H_{c1} < H < H_{c2}$  реализуется пространственно неоднородное, так называемое, смешанное состояние.

Приведем характерных значений критического поля  $H_c(0)$  для некоторых сверхпроводников:

$$W - H_c(0) \simeq 1Gs,$$

$$Hg - H_c(0) \simeq 411Gs,$$

$$Nb - H_c(0) \simeq 2060Gs.$$

Кроме критической температуры и критического магнитного поля, существует также и критический ток, при превышении которого сверхпроводимость пропадает. Для достаточно толстых проводов, критический ток может быть найден из условия, чтобы магнитное поле на поверхности провода  $H_{surf} = H_c$ .

## 1.2 Эффект Мейсснера-Оксенфельда

Удивительно, но до 1933 года, никто из исследователей не задался вопросом о проникновении магнитного поля в сверхпроводник. По-видимому ответ казался тривиальным и следовал из представления о сверхпроводнике как о проводнике с бесконечной проводимостью  $\sigma = \infty$ . В соответствии с этими воззрениями при переходе в сверхпроводящее состояние магнитное поле должно бы остаться таким же, каким было до перехода, или говоря другими словами, замораживаться. Действительно, из материального соотношения

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

и условия конечности тока и бесконечности проводимости следует

$$\mathbf{E} = 0,$$

откуда, используя уравнение Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{crot} \mathbf{E},$$

мгновенно получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

т.е поле  $\mathbf{B}$  - постоянно во времени, заморожено. Если бы мы заморозили сверхпроводник в нулевом поле, а потом поле включили, мы получили бы картинку силовых линий как на Рис.4 а), а если охлаждали в конечном поле, то поле не изменилось бы, и картинка была бы как на Рис.4 б).

Австрийские ученые Мейсснер и Оксенфельд предположили, что вопрос о проникновении магнитного поля в сверхпроводник не совсем тривиален и в 1933 году предприняли экспериментальные исследования и обнаружили эффект, который носит их имена. Они обнаружили, что независимо от того в нулевом или конечном поле происходит переход в сверхпроводящее состояние, в конечном состоянии внутри сверхпроводника всегда  $\mathbf{B} = 0$  и картинка силовых линий выглядит как показано на Рис.4 а). Это и есть содержание эффекта Мейсснера-Оксенфельда, из сверхпроводника магнитное поле выталкивается и внутри сверхпроводника магнитное поле  $\mathbf{B} = 0$ . Можно сказать, что сверхпроводник представляет собой идеальный диамагнетик.



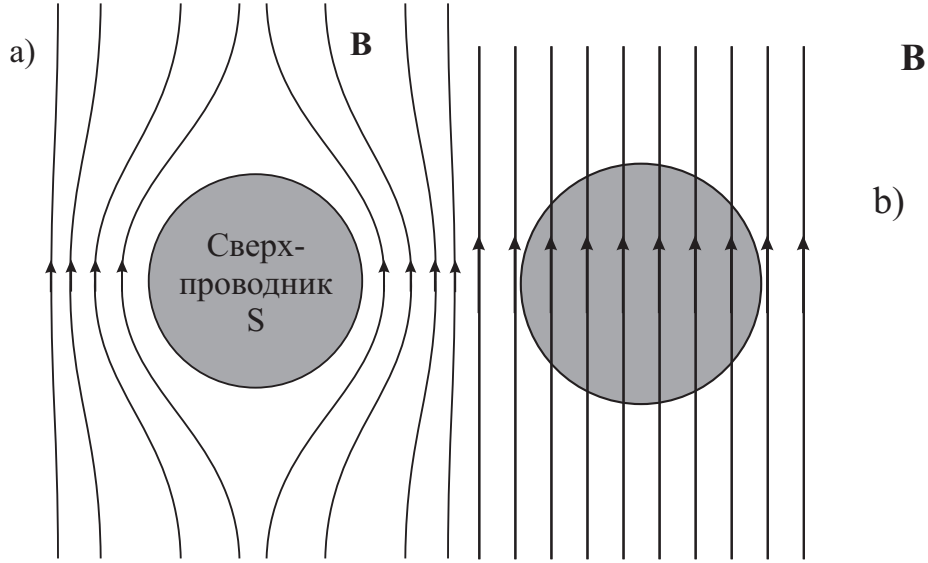


Рис. 4: Распределение магнитного поля в сверхпроводнике. Картинка а) иллюстрирует эффект Мейсснера, картинка б)-проникновение магнитного поля в образец

## 2 Элементарные электродинамические следствия из существования эффекта Мейсснера

В этом разделе мы будем характеризовать электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ , а магнитное поле - индукцией  $\mathbf{B}$  и пользоваться двухвекторной записью уравнений Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{crot} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{crot} \mathbf{E} \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{j}$  - плотность тока, текущего в веществе. Подробнее об этой форме записи уравнений Максвелла будет рассказано в разделе 3.1 Обозначим индексами  $e, i$  поля снаружи и внутри сверхпроводника. Тогда из уравнения

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

и следующего из него граничного условия непрерывности нормальных компонент

$$B_{ne} = B_{ni}$$

и условия  $\mathbf{B}_i = 0$  следует что внешнее магнитное поле чисто тангенциально и картинка силовых линий внешнего магнитного поля вблизи сверхпроводника выглядит как показано на Рис.4 а) и Рис.5.

Раз в глубине сверхпроводника  $\mathbf{B}_i = 0$ , то вблизи поверхности сверхпроводника, в слое некоторой толщины, должен течь ток. Толщину слоя где течет ток называют глубиной проникновения магнитного поля в сверхпроводник или Лондоновской глубиной. Введем систему координат вблизи поверхности сверхпроводника как показано на Рис.5 Интегрируя уравнение Максвелла  $\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$  вдоль нормали к поверхности найдем  $B_{ext y} = \frac{4\pi}{c} j_{surf z}$  где поверхностная плотность тока

$$\mathbf{j}_{surf} = \int_{-\infty}^0 \mathbf{j} dx.$$

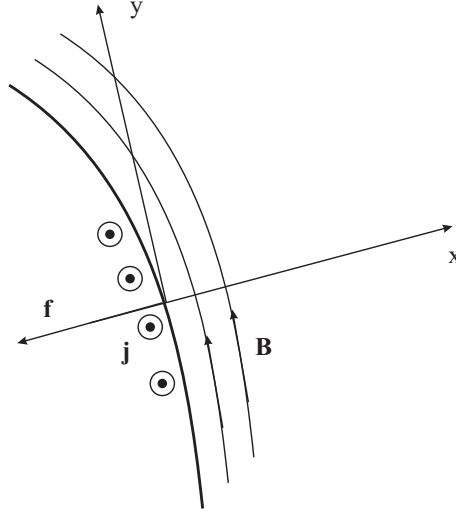


Рис. 5: Распределение магнитного поля и тока вблизи поверхности сверхпроводника

Выражение для поверхностного тока можно записать в инвариантном векторном виде

$$\mathbf{j}_{surf} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{nB}_e].$$

Поскольку в поверхностном слое сверхпроводника течет ток и есть магнитное поле, то на поверхность сверхпроводника будет действовать сила Лоренца, объемная плотность которой равна

$$\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] = \frac{1}{4\pi} [\text{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B}].$$

Для нахождения поверхностной плотности силы необходимо выполнить интегрирование по глубине, которое проще всего выполнить проектируя векторное соотношение на оси системы координат

$$f_x^{surf} = \int_{-\infty}^0 f_x dx = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^0 B_y \frac{\partial B_y}{\partial x} dx = -\frac{B_e^2}{8\pi}.$$

Возвращаясь к инвариантным векторным обозначениям, получаем

$$\mathbf{f}^{surf} = -\mathbf{n}P, \quad P = \frac{B_e^2}{8\pi}. \quad (4)$$

Нормальная компонента поверхностной силы представляет собой давление, и мы, таким образом, получили что на сверхпроводник в магнитном поле действует магнитное давление  $P = \frac{B_e^2}{8\pi}$ .

### 3 Сверхпроводник в магнитном поле. Аналогия с магнетиком.

- Уравнения Максвелла в различных формах, ток, намагниченность, поляризация, напряженности и индукции полей. Квазистатическое приближение.
- Материальные уравнения для сверхпроводника, аналогия с магнетиком
- Граничные условия на поверхности сверхпроводника, поверхностный ток, магнитное давление
- Задачи о сверхпроводящих шаре и цилиндре в однородном магнитном поле

### 3.1 Уравнения Максвелла. Индукции и напряженности.

Напомним некоторые сведения из электродинамики, которые нам понадобятся при описании сверхпроводников. В качестве основных уравнений будем использовать уравнения Максвелла в двухвекторной форме, описывая электромагнитное поле двумя векторами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , представляющие усредненные напряженность электрического и индукцию магнитного полей. Уравнения запишем в форме

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{crot} \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{j} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{crot} \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

подчеркивающей, что с динамической точки зрения мы имеем только два эволюционных уравнения для полей  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , третье уравнение представляет определение плотности электрического заряда, удовлетворяющего уравнению непрерывности, а четвертое уравнение есть просто ограничение на допустимые начальные условия для магнитного поля. Эти уравнения должны быть дополнены материальной связью, описывающей динамику вещества и дающей связь электрического тока с электромагнитным полем. Часто представляют материальную связь в виде

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E},$$

где оператор  $\hat{\sigma}$  называется оператором проводимости.

Сам Максвелл писал свои уравнения в 4-х векторной форме, опираясь на аналогию некоторой гипотетической упругой среды - эфира, в котором он считал распространяются электромагнитные волны и обычной упругой среды. А в обычной теории упругости вводятся два типа величин: деформации или смещения, которые возникают под действием механических напряжений. Так и Максвелл ввел напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей, и возникающих под их действием 'деформаций', электрической и магнитной индукции  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ . Заметим, что, название вектора электрической индукции происходит от английского 'displacement' - смещение. Отсюда же произошел термин - 'ток смещения'.

Четырехвекторная форма уравнений Максвелла получается при выделении из полного тока  $\mathbf{j}$  токов поляризации, намагниченности и остальных.

$$\mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{crot} \mathbf{M} + \mathbf{j}_e. \quad (8)$$

Здесь  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$  - вектора поляризации и намагниченности,  $\mathbf{j}_e$  - внешний или сторонний ток, не включенный в ток поляризации и намагниченности. Это может быть ток проводимости. Это разделение неоднозначно и всегда необходимо договариваться что понимается под каждым вкладом в ток. Например, весь ток может быть включен в ток поляризации. Мы будем пользоваться обеими формами записи уравнений, но всегда пояснять правило разбиения токов на разные типы.

Подставляя выражение для тока 8 в уравнения Максвелл 9 и объединяя члены под знаком rot и  $\partial_t$  мы приходим к

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{crot} \mathbf{H} - 4\pi \mathbf{j}_e, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{crot} \mathbf{E}, \quad (10)$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_e, \quad \text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

Вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  и напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  образованы следующим (стандартным) образом

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} + 4\pi \mathbf{M}.$$

Материальные связи для четырехвекторных уравнений выглядят следующим образом

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \hat{\rho}\mathbf{H}, \quad \mathbf{j}_e = \hat{\sigma}\mathbf{E},$$

где  $\epsilon, \mu$  электрическая и магнитная проницаемости.

### 3.2 Сверхпроводник во внешнем магнитном поле.

Типичная схема эксперимента по измерению магнитных свойств сверхпроводника выглядит следующим образом. Сверхпроводник помещают во внешнее магнитное поле, созданное внешним током  $\mathbf{j}_e$ , текущим по катушке. Геометрия эксперимента показана на Рис.6

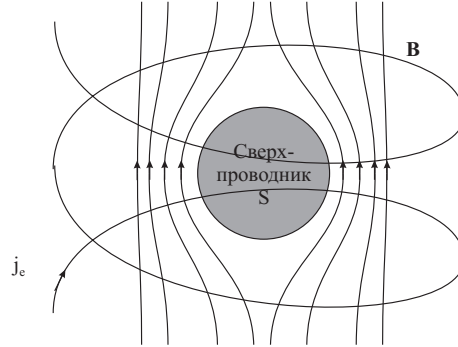


Рис. 6: Типичная схема эксперимента по воздействию магнитного поля на сверхпроводник. По внешней катушке течет ток  $\mathbf{j}_e$ , по образцу  $-\mathbf{j}_i$

Если предположить, что изменение (включение) тока происходит медленно, с характерным временем  $T \gg L/c$ , где  $L$  - характерный масштаб магнитного поля, то будет применимо квазистатическое приближение, заключающееся в пренебрежении током смещения (производной  $\partial_t \mathbf{E}$ ) в уравнениях Максвелла. В этом приближении уравнения выглядят следующим образом.

$$\text{crot}\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

$$\text{crot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (13)$$

Теперь удобно разбить полный ток на внутренний, текущий по сверхпроводнику, и внешний токи  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e$  и внутренний ток представить в виде тока намагниченности  $\mathbf{j}_i = \text{crot}\mathbf{M}$ , и ввести вектор  $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}$ . Уравнения 12 примут вид

$$\text{crot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_e, \quad \text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (14)$$

$$\text{crot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (15)$$

а материальная связь между полями  $B$  и  $H$  может быть записана в виде  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , где, поскольку  $B_i = 0$ , то  $\mu = 0$  внутри сверхпроводника и  $\mu = 1$  вне. Из уравнений 14 следуют граничные условия непрерывности тангенциальных компонент  $H$  и нормальных компонент  $B$  на границе сверхпроводника

$$B_{ne} = B_{ni} \quad \mathbf{H}_{\tau e} = \mathbf{H}_{\tau i}. \quad (16)$$

Давайте используем приведенные уравнения для нахождения распределений магнитного поля вокруг сверхпроводящих образцов различной формы, помещенных в однородное магнитное поле  $H_0$  и найдем кривые намагниченности, т.е. зависимости  $B(H_0)$  и  $M(H_0)$ , предполагая что сверхпроводник является сверхпроводником первого рода или что при  $B = H_c$  происходит фазовый переход из сверхпроводящего в нормальное состояние.

Из уравнения  $\text{rot}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_e$  и граничного условия на границе сверхпроводника следует, что поле  $H$  потенциально в области где  $j_e = 0$ . Поэтому мы можем искать поле  $H$  в виде  $\mathbf{H} = -\text{grad}\psi$  и приходим к уравнению  $\text{div}\mu\text{grad}\psi = 0$ , откуда следует, что снаружи и внутри сверхпроводника магнитный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\psi_{e,i} = 0, \quad (17)$$

с граничными условиями

$$\psi_i|_S = \psi_e|_S, \quad \partial\psi/\partial\mathbf{n}|_S = 0, \quad (18)$$

выражающими непрерывность потенциала на границе сверхпроводника и равенство нулю нормальной производной. Последнее условие следует из равенства нулю поля  $\mathbf{V}$  внутри.

### 3.2.1 Длинный узкий цилиндр в магнитном поле, параллельном образующей

Этот случай наиболее прост. Если цилиндр длинный и узкий  $L \gg a$ , где  $L$  длина,  $a$  - радиус цилиндра, то из условия непрерывности тангенциальной компоненты  $H$  следует, что магнитное поле вдали от концов цилиндра практически не возмущено. Это иллюстрирует Рис.7, на котором показана картина силовых линий. Напряженность  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  однородна, не искажается присутствием сверхпроводника и не зависит от того в сверхпроводящем или нормальном состоянии находится образец. Внутри образца  $B = 0$  и  $4\pi M = -H$  когда образец находится в сверхпроводящем состоянии и  $B = H$ ,  $M = 0$  когда образец - в нормальном состоянии. Здесь и в дальнейшем мы будем считать нормальное состояние металла слабо магнитным и пренебрегать отличием  $\mu$  в нормальном состоянии от единицы. На концах цилиндра существуют источники, магнитные заряды для поля  $\mathbf{H}$

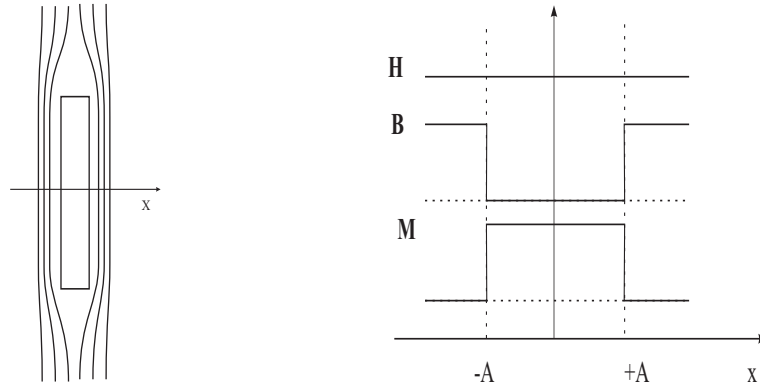


Рис. 7: Распределение магнитного поля вблизи длинного тонкого цилиндра

из-за  $\text{div}\mathbf{H} \neq 0$ , создающие монополярные магнитные возмущения, которые, однако, сильно спадают вдали от концов. Кривая намагниченности, показанная на Рис.8, имеет очень простой вид.

### 3.2.2 Цилиндр в магнитном поле, перпендикулярном образующей

Картина силовых линий магнитного поля вокруг цилиндра качественно показана на Рис.4, а для её аналитического нахождения мы должны решить уравнение 17 с условиями 18 на поверхности сверхпроводника, так чтобы при  $\mathbf{r} \rightarrow \infty$  магнитное поле стремилось бы к однородному с напряженностью  $H$ . Примем направление поля  $H$  за ось  $z$ , ось  $y$  направим вдоль образующей, ось  $x$  перпендикулярно им обеим. Введем полярные координаты в плоскости  $x, z$  с центром на оси цилиндра, как показано на Рис.9 и перепишем уравнение Лапласа 17 в этих координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0. \quad (19)$$

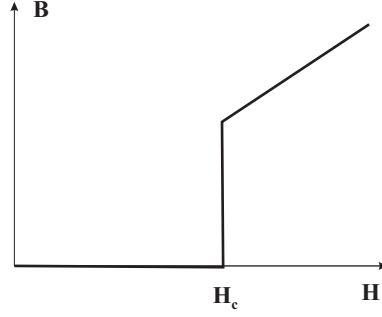


Рис. 8: Кривая намагниченности цилиндра в однородном поле параллельном образующей

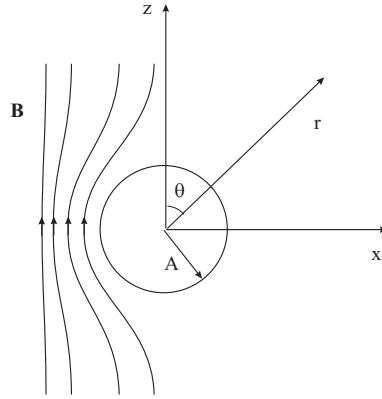


Рис. 9: Качественная картина поведения индукции магнитного поля вблизи края цилиндра и сферы

Поскольку магнитное поле при  $r \rightarrow \infty$  должно стремиться к однородному, то потенциал  $\psi$  должен стремиться к  $-(\mathbf{H}\mathbf{r}) = -Hr \cos \theta$ . Поэтому естественно искать решение 19 в виде  $\psi(r, \theta) = \Psi(r) \cos \theta$ , обеспечивающим правильную (такую же как на  $\infty$ ) угловую зависимость. Уравнение для радиальной части

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Psi = 0, \quad (20)$$

легко решается и его общее решение есть  $\Psi(r) = Ar + Br^{-1}$ , где  $A$  и  $B$ - произвольные постоянные. Отсюда, используя условия на бесконечности и регулярности решения в начале координат, находим для потенциала внутри и снаружи следующие выражения

$$\Psi_i = -H_i r, \quad \Psi_e = -Hr - Ar^{-1}, \quad (21)$$

с двумя неопределенными коэффициентами  $H_i$  и  $A$ , которые легко находятся из условия непрерывности потенциала на поверхности цилиндра и равенства нулю нормальной производной потенциала

$$\Psi_i = \Psi_e|_{r=a}, \quad \partial_r \Psi_e|_{r=a} = B_{er}|_{r=a} = 0. \quad (22)$$

Находя коэффициенты получаем

$$\Psi_i = -2Hr \quad \Psi_e = -H(r + a^2 r^{-1}),$$

откуда следует, что

- напряженность  $H$  внутри однородна и равна удвоенному полю на бесконечности
- поле снаружи представляет суперпозицию однородного и дипольного поля. Величина дипольного момента  $A = a^2 H$

### 3.2.3 Сверхпроводящий шар в магнитном поле

Задача о сверхпроводящем шаре в магнитном поле практически, с точностью до некоторых деталей аналогична задаче о цилиндре, решенной в предыдущем пункте. В меридиональной плоскости картинка силовых линий и геометрия задачи выглядит точно также, как и для цилиндра и как показано на Рис.9. Система координат теперь будет сферической, и мы будем должны решить уравнение Лапласа для магнитного потенциала и удовлетворить условию однородности поля на бесконечности  $\psi(r, \varphi, \theta) \rightarrow -(\mathbf{Hr}) = -Hr \cos \theta$ . Записывая уравнение Лапласа 17 в сферической системе координат

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \psi = 0. \quad (23)$$

и отыскивая решение, обладающее угловой зависимостью поля на бесконечности  $\psi(r, \varphi, \theta) = \Psi(r) \cos \theta$  найдем для  $\Psi(r)$ , уравнение аналогичное уравнению 20

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \Psi = 0, \quad (24)$$

общее решение которого есть  $\Psi = Ar + Br^{-2}$  и

$$\Psi_i = -H_i r \quad \Psi_e = -Hr - Ar^{-2}. \quad (25)$$

. Находя коэффициенты из граничных условий, которые выглядят также как в предыдущей задаче, получаем

$$\Psi_i = -\frac{3}{2} H r \quad \Psi_e = -H \left( r + \frac{a^3}{2r^2} \right),$$

Пока напряженность магнитного поля внутри образца  $H_i$  не превышает  $H_c$  образец находится в сверхпроводящем состоянии и  $B_i = 0$ . Такое состояние реализуется при  $H < H_c/2$  для цилиндра и  $H < 2H_c/3$  для сверхпроводящей сферы. При  $H > H_c$  реализуется нормальное состояние. А какое состояние реализуется при промежуточных значениях магнитных полей, при  $H_c/2 < H < H_c$  для сверхпроводящего цилиндра и  $2H_c/3 < H < H_c$  для сферы. Легко сообразить, что это состояние не может быть сверхпроводящим, так как при этом  $B_i = 0$  и магнитное поле  $H_i$  превышало бы критическое значение и сверхпроводимость бы разрушилась. Это состояние не может быть нормальным, так как при этом  $B_i = H_i < H_c$  и сверхпроводимость должна была бы возникать.

Ответ заключается в том, что при таких промежуточных значениях полей реализуется так называемое промежуточное состояние, представляющее собой последовательность нормальных и сверхпроводящих слоев с образующими, параллельными однородному внутреннему полю  $\mathbf{H}_i$ . Более подробно структура этого состояния будет рассмотрена после изучения термодинамики сверхпроводящего перехода, в п.4.5. В этом промежуточном состоянии внутренняя напряженность магнитного поля в точности равна критическому значению  $H_i = H_c$  а макроскопическая магнитная индукция  $\overline{\mathbf{B}}_i$ , представляющая пространственное среднее от микроскопической индукции  $\mathbf{B}_i$  имеет произвольное значение, определяемое уравнениями Максвелла. Поэтому для определения коэффициентов в формулах 25 и 21 нужно использовать не условие 22 с  $B_{er}|_{r=a} = 0$ , а условие  $H_i = H_c$ , что дает вместо  $B_{iz} = 0$  следующие значения для внутреннего поля  $B$

$$B_i = 2H - H_c \quad \text{для цилиндра} \quad (26)$$

$$B_i = 3H - 2H_c \quad \text{для сферы} \quad (27)$$

Картинки кривых намагничивания сверхпроводящих цилиндра и сферы приведены с учетом существования промежуточного состояния приведены на Рис.10

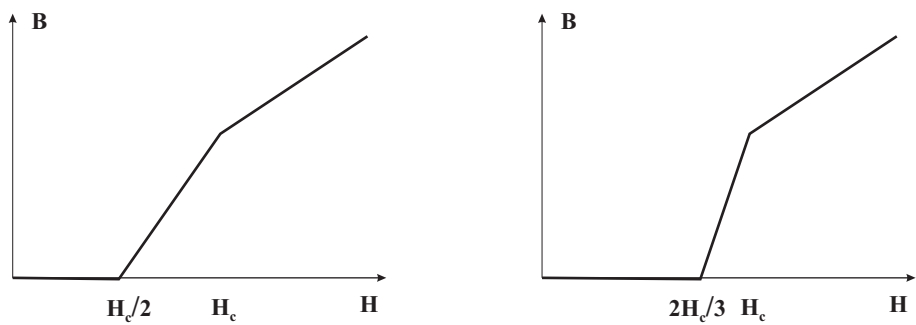


Рис. 10: Кривые намагниченности цилиндра и сферы в однородном поле



## 4 Элементарная термодинамика сверхпроводящего перехода

### 4.1 Краткое изложение основных понятий термодинамики

Главное содержание термодинамики заключается в формулировке вариационного принципа, указывающего направление развития неравновесных систем и играющего роль принципа наименьшего действия в динамике. Этот вариационный принцип называется вторым началом термодинамики или принципом возрастания энтропии.

### 4.2 Принцип возрастания энтропии

Кратко этот принцип можно сформулировать следующим образом. Для изолированной системы существует функция состояния  $S$  - энтропия, которая при стремлении системы к равновесию возрастает, и в равновесии достигает своего максимального значения. Поясним действие этого принципа на простом примере. Рассмотрим систему, состоящую из двух частей, каждая из которых внутри равновесна, но между ними равновесия нет. Рассмотрим мысленный эксперимент. В сосуде

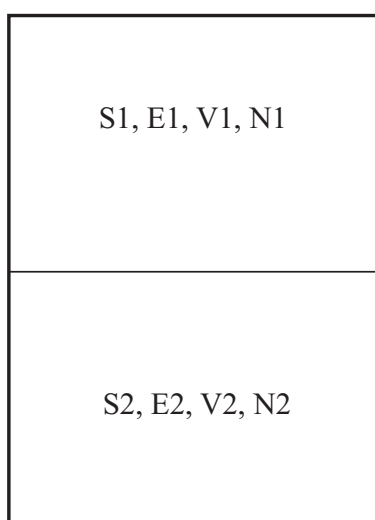


Рис. 11: Установления равновесия в замкнутой системе

с жесткими стенками находится газ, который состоит из двух частей 1 и 2 каждая из которых находится во внутреннем равновесии, но не в равновесии между собой. Схема мысленного эксперимента изображена на Рис.11. Тогда энтропия каждого из кусков будет функцией их внутренних энергий, объемов и чисел частиц,

$$S_1 = S_1(E_1, V_1, N_1) \quad S_2 = S_2(E_2, V_2, N_2),$$

а общая энтропия будет суммой энтропий кусков

$$S = S_1 + S_2$$

Потребовав максимума энтропии при изменении  $E_1$  и учтя сохранение энергии  $\delta E_1 = -\delta E_2$  мы найдем, что в равновесии

$$\frac{\delta S}{\delta E_1} = \frac{\delta S_1}{\delta E_1} - \frac{\delta S_2}{\delta E_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0. \quad (28)$$

При переходе к последнему равенству мы воспользовались обычным определением температуры для равновесной системы

$$T^{-1} = \frac{\delta S}{\delta E}. \quad (29)$$

И таким образом мы из закона возрастания энтропии пришли к выводу, что при стремлении систем к взаимному равновесию у них выравниваются температуры. Из этого определения температуры следует, что поток тепла, переданный системе квазистационарным образом может быть записан как  $\delta Q = T\delta S$ . Если же тепловой поток передается неравновесным (необратимым, не квазистационарным) образом, то в силу возрастания энтропии

$$\delta Q - T\delta S \leq 0 \quad (30)$$

Это так называемая формулировка второго начала термодинамики в форме неравенства Клаузиуса. Напишем теперь изменение энергии  $\delta E$  для какой либо термодинамической системы,

$$\delta E = T\delta S + \delta A + \mu\delta N \quad (31)$$

связанное, соответственно с приходом тепла от окружающей среды, с работой окружения над системой и переносом частиц. Если термодинамическая система - газ, то  $\delta A = -p\delta V$ , где  $p$ -давление и

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + \mu\delta N \quad (32)$$

Это равенство определяет функцию  $E$  как функцию независимых переменных  $S, V, N$ . Говорят, что внутренняя энергия представляет термодинамический потенциал в переменных  $S, V, N$ . Это дифференциальное равенство 32 фактически определяет температуру, давление и химический потенциал

$$T = \frac{\delta E}{\delta S}, \quad P = -\frac{\delta E}{\delta V}, \quad \mu = \frac{\delta E}{\delta N}, \quad (33)$$

соответственно.

Возвращаясь к условиям равновесия неравновесной системы, показанной на Рис.11, еще раз напомним, что они находятся путем приравнивания производных энтропии

$$S = S_1(E_1, V_1, N_1) + S_2(E_2, V_2, N_2)$$

по внутренним параметрам  $E_1, V_1, N_1$  нулю.

$$\frac{\delta S}{\delta E_1} = \frac{\delta S_1}{\delta E_1} - \frac{\delta S_2}{\delta E_2} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\delta S}{\delta V_1} = \frac{\delta S_1}{\delta V_1} - \frac{\delta S_2}{\delta V_2} = -\frac{P_1}{T_1} + \frac{P_2}{T_2} = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\delta S}{\delta N_1} = \frac{\delta S_1}{\delta N_1} - \frac{\delta S_2}{\delta N_2} = \frac{\mu_1}{T_1} - \frac{\mu_2}{T_2} = 0 \quad (36)$$

Эти условия представляют хорошо известные условия теплового, механического и химического равновесия, выражающие баланс потоков энергии, импульса и частиц между двумя подсистемами.

В качестве независимых переменных для термодинамических потенциалов вместо энтропии  $S$  может быть выбрана температура  $T = \delta E/\delta S$ . Преобразование к новым переменным осуществляется с помощью преобразования Лежандра. Рассмотрим равенство 32, добавим и вычтем  $S\delta T$

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + \mu\delta N = T\delta S + S\delta T - S\delta T - p\delta V + \mu\delta N \quad (37)$$

откуда

$$\delta F(T, V, N) = \delta(E - TS) = -S\delta T - p\delta V + \mu\delta N \quad (38)$$

Это термодинамический потенциал называется свободной энергией (или свободной энергией Гельмгольца) и зависит от переменных  $T, V, N$ . Производя аналогично преобразования Лежандра по остальным переменным можно определить другие термодинамические потенциалы, такие как энталия

$$\delta W(S, P, N) = \delta(E + PV) = T\delta S + V\delta P + \mu\delta N \quad (39)$$

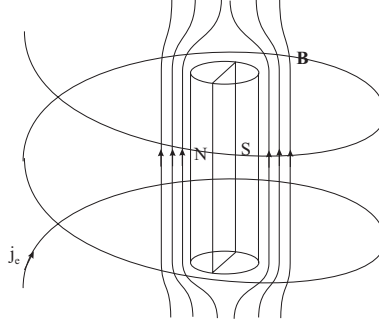


Рис. 12: Двухфазный образец в магнитном поле

и свободная энергия Гиббса (или просто термодинамический потенциал)

$$\delta G(T, P, N) = \delta(E - TS + PV) = -S\delta T + V\delta P + \mu\delta N \quad (40)$$

Таким образом, чтобы описать состояние вещества, достаточно задать один из функционалов  $S(E, V)$  или  $E(S, V)$ , или  $F(T, V)$ , или  $G(T, p)$ . Все остальные функции получают дифференцированием исходного функционала по различным переменным.

Термодинамические потенциалы зависящие от  $T$ , такие как свободная энергия  $F(T, V)$  и термодинамический потенциал  $G(T, P)$  позволяют сформулировать второе начало термодинамики как принцип убывания этих потенциалов при фиксированных  $T, V$  и  $T, P$  соответственно. Действительно, рассмотрим, например изменение во времени свободной энергии

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dE - TS}{dt} = \frac{dE}{dt} - T\frac{dS}{dt} = \frac{dQ}{dt} - T\frac{dS}{dt} \leq 0. \quad (41)$$

При получении этого неравенства было использовано определение 38, равенство  $\delta E = \delta Q$ ,  $V = \text{const}$  и неравенство Клаузиуса 30

Теперь мы можем перейти к изложению элементарной термодинамики сверхпроводников.

### 4.3 Выбор термодинамической системы и окружения. Выражение для работы и термодинамических потенциалов.

В качестве основы для термодинамического описания сверхпроводящего перехода рассмотрим образец в форме длинного узкого цилиндра, помещенного в однородное магнитное поле, параллельное образующей цилиндра. Магнитное поле создается какой то внешней системой, показанной на Рис.12 в виде катушки. Если в цилиндре сосуществуют нормальная и сверхпроводящая фазы, то будем предполагать, что граница раздела фаз тоже имеет цилиндрическую форму параллельную магнитному полю. Для простоты сейчас мы предположим, что эта граница одна, как показано на Рис.12.

Применим термодинамическое описание, рассмотренное в предыдущем параграфе для газа, к сверхпроводникам. Отметим, что для сверхпроводников такой подход должен быть модифицирован, т.к. его состояние определяется не только  $T, V, N$ , но также магнитным полем и тангенциальными напряжениями. Сверхпроводник - твердое тело, и работа над ним со стороны внешних сил записывается не как для газа  $\delta A = -P\delta V$ , а, строго говоря, как

$$\delta A = - \sum_{i,k=1}^3 \sigma_{i,k} \delta u_{k,i},$$

где  $\sigma_{i,k}$ - тензор натяжений, а  $u_{i,k}$ - тензор деформации. Однако, из-за того что в магнитном поле на сверхпроводник действует только нормальное давления, мы сможем пренебречь этой спецификой

сверхпроводника как твердого тела и записывать механическую работу как  $\delta A = -P\delta V$ . Итак, в качестве термодинамической системы будем рассматривать систему 'сверхпроводник + магнитное поле', а катушку, создающую магнитное поле и газ в лаборатории, который давит на образец будем относить к окружению. Найдем работу электромагнитного окружения, внешнего тока  $j_e$ , текущего по катушке, над нашей термодинамической системой. Эта работа  $\delta A_{em}$ , входит в приращение внутренней энергии

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + \delta A_{em} + \mu\delta N, \quad (42)$$

Выражение для работы

$$\delta A_{em} = -\delta t \int (\mathbf{j}_e \cdot \mathbf{E}) dV, \quad (43)$$

преобразуем с помощью квазистатических уравнений Максвелла 14, считая процессы включения магнитного поля медленными

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{ext}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \delta A_{em} &= -\frac{c}{4\pi} \delta t \int (\text{rot}\mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) dV = -\frac{c}{4\pi} \delta t \int \{\mathbf{H} \text{rot}\mathbf{E} - \text{div}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}]\} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} dV + \frac{c}{4\pi} \int [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S}. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое, представляющее поток энергии через бесконечно удаленную замкнутую поверхность, в квазистатическом приближении равно нулю. Другими словами, при медленном, адиабатическом изменении тока, излучением электромагнитных волн можно пренебречь. Окончательно, для приращения внутренней энергии, будем иметь следующее выражение

$$\delta E = T\delta S - p\delta V + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} dV.$$

Для того, чтобы описать сверхпроводник, необходимо знать какой либо термодинамический потенциал  $S(E, V, \mathbf{B})$  или  $F(T, V, \mathbf{B})$

$$\delta F = -S\delta T - p\delta V + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} dV. \quad (44)$$

Например, для внутренней энергии магнитного поля в пустоте ( $B = H$ ) из приведенного соотношения легко получить известное выражение

$$\delta E = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{H} \delta \mathbf{B} dV = \delta \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV \quad E = \frac{1}{8\pi} \int B^2 dV. \quad (45)$$

Приведенные соотношения определяют термодинамические потенциалы как функционалы от индукции магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Нетрудно определить потенциалы как функционалы от

$$\mathbf{H} = \frac{\delta E}{\delta \mathbf{B}}$$

. Соответствующие потенциалы будем обозначать волной над буквой, например

$$\tilde{F}(T, V, H, N) = F - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B} \mathbf{H} dV, \quad \delta \tilde{F} = -S\delta T - P\delta V + \mu\delta - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B} \delta \mathbf{H} dV.$$

Эти потенциалы в переменных  $H$  особенно удобны для описания сверхпроводников, поскольку в Мейсснеровском состоянии  $B = 0$ . Напишем свободную энергию  $\tilde{F}$ . Так как внутри сверхпроводника  $\mathbf{B} = 0$ , то

$$\tilde{F}_s = F_{0s} - \frac{1}{8\pi} \int_{V_s} H^2 dV,$$

где  $F_{0s}$  есть свободная энергия сверхпроводника в отсутствие магнитного поля, интегрирование производится по объему вне сверхпроводника. Добавив и вычтя интеграл по  $V_s$  и учитывая, что поле  $H$  внутри тонкого и длинного цилиндрического образца невозмущено и однородно, найдем

$$\tilde{F}_s = F_{0s} + \frac{1}{8\pi} V_s H^2 - \frac{1}{8\pi} \int H^2 dV,$$

Последнее слагаемое, представляемое интегралом по всему пространству не зависит от состояния сверхпроводника и может быть в дальнейшем опущено.

#### 4.4 Равновесие нормальной и сверхпроводящей фаз

Теперь можем написать свободную энергию всего образца, который состоит из нормальной (N) и сверхпроводящей (S) фаз

$$\tilde{F} = F_{0s}(T, V_s, N_s) + F_n(T, V_n, N_n) + \frac{1}{8\pi} V_s H^2,$$

Требую экстремальности этого выражения по отношению к вариации объема  $\delta V_s = -\delta V_n$ , найдем условие механического равновесия

$$\frac{\partial F}{\partial V_s} = \frac{\partial F_{0s}}{\partial V_s} - \frac{\partial F_n}{\partial V_n} + \frac{1}{8\pi} H^2 = 0; \Rightarrow p_s = p_n + \frac{1}{8\pi} H^2, \quad (46)$$

и, тем самым, уже известное нам магнитное давление на сверхпроводящую фазу, дающееся уравнением 4.

Точно также, дифференцируя по  $\delta N_s = -\delta N_n$  найдем условие химического равновесия, равновесия по отношению к обмену частиц между фазами

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial N_s} &= \frac{\partial F_{0s}}{\partial N_s} - \frac{\partial F_n}{\partial N_n} = \\ &= V_s \frac{\partial f_{0s}}{\partial N_s} - V_n \frac{\partial f_n}{\partial N_n} = \frac{V_s}{N_s} (p_s + f_{0s}) - \frac{V_n}{N_n} (p_n + f_n). \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь мы ввели объемные плотности свободных энергий сверхпроводящей и нормальной фаз

$$F_{0s}(T, N_s, V_s) = V_s f_{0s}(T, \frac{N_s}{V_s}) \text{ и } F_n = V_n f_n(T, \frac{N_n}{V_n})$$

– и учли, что числа частиц входят в эти функции только в комбинации  $N_s/V_s$  и  $N_n/V_n$ , что позволяет выразить производные по числу частиц через производные по объему

$$V_{s,n} \frac{\partial}{\partial V_{s,n}} = -N_{s,n} \frac{\partial}{\partial N_{s,n}}, \quad \frac{\partial V_s f_{0s}}{\partial V_s} = -p_s \quad \frac{\partial V_n f_n}{\partial V_n} = -p_n.$$

Если мы пренебрежем сжимаемостью сверхпроводника при действии магнитного давления и примем что концентрации частиц в нормальной и сверхпроводящей фазах совпадают  $N_s/V_s = N_n/V_n$ , условие равновесия фаз примет простой вид

$$f_{0s} + \frac{H_c^2}{8\pi} = f_n. \quad (48)$$

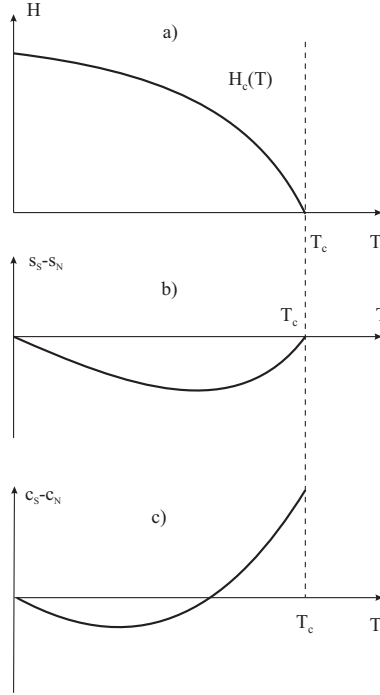


Рис. 13: Кривая а) - зависимость критического поля от температуры для сверхпроводника 1 рода, кривая б)-разность энтропий сверхпроводящей и нормальной фаз, с) - разность теплоемкостей S и N фаз.

Если бы плотности свободных энергий были бы известны, это равенство определило бы зависимость критического поля от параметров. Если же считать  $H_c(T)$  известной, например, в результате экспериментальных измерений, то можно найти разности термодинамических величин в N и S фазах по разные стороны перехода, определяющее кривую химического равновесия двух фаз.

Будем считать, что зависимость  $H_c(T)$  нам известна из эксперимента и имеет вид, показанный на Рис.13

Продифференцируем условие равновесия 48 по температуре вдоль кривой равновесия, и учитывая, что энтропия единицы объема  $s_s = -\frac{\partial f_{0s}}{\partial T}$  мы получим выражение для скачка плотности энтропии

$$\frac{\partial f_{0s}}{\partial T} + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial T} = \frac{\partial f_n}{\partial T}, \quad s_s = s_n + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial H^2}{\partial T} \quad (49)$$

график зависимости от температуры которой приведен на Рис.13 б) Зная скачок энтропии, можно легко вычислить теплоту перехода (на единицу объема) по формуле  $\delta Q = T\Delta s$  или  $Q_{S \rightarrow N} = T(s_s - s_n)$ . Из 49 следует  $Q_{N \rightarrow S} > 0$ , т.е. при сверхпроводящем переходе  $N \rightarrow S$  при  $H \neq 0$  выделяется конечное количество тепла и, следовательно NS переход в конечном магнитном поле - это фазовый переход первого рода. Т.е. сверхпроводник 1 рода при конечном магнитном поле испытывает фазовый переход 1 рода. При нулевом магнитном поле теплота перехода равна нулю и фазовый переход является переходом второго рода. Мы покажем, что при этом теплоемкость будет испытывать скачок.

Чтобы сосчитать удельную теплоемкость фаз по обе стороны перехода продифференцируем равенство 49 по температуре и воспользуемся определением теплоемкости  $c = \frac{\partial Q}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}$ . Мы найдем следующее соотношение

$$c_s = c_n + \frac{T}{8\pi} \frac{\partial^2 H_c^2}{\partial T^2}, \quad (50)$$

демонстрирующее существование скачка теплоемкости при фазовом переходе в сверхпроводящее состояние. График зависимости теплоемкости от температуры показан на нижнем графике Рис.13.

#### 4.5 Промежуточное состояние сверхпроводника

Как мы теперь знаем, при поле равном критическому сверхпроводящая и нормальная фазы сверхпроводника первого рода, с фазовой диаграммой типа Рис.3-левая, сосуществуют, или, другими словами, находятся в равновесии. Причем, количество той и другой фазы может быть любым, лишь бы выполнялось условие  $V_s + V_n = V$  и границы раздела фаз были параллельны магнитному полю. Ситуация аналогична фазовому переходу лед-вода, что при нуле градусов любые количества воды и льда находятся в равновесии. Поэтому естественно предположить, что при  $H = H_c$  возможно макроскопически однородное расслоенное состояние, состоящее из множества чередующихся нормальных и сверхпроводящих квазицилиндрических образований, с образующими, параллельными напряженности магнитного поля. В сверхпроводящих областях  $\mathbf{V}_i = 0$ , а в нормальных  $\mathbf{V}_i = \mathbf{H}_i = \mathbf{z}_0 H_c$ . Средняя макроскопическая магнитная индукция в этом состоянии произвольна, как показано на Рис.14 и определяется долей нормальных областей. Действительно, поскольку в сверхпроводящих слоях  $B = 0$  а в нормальных  $B = H = H_c$ , то усредненное значение индукции  $B = \eta H_c$ , где  $\eta$  -объемная доля нормальной фазы, она может быть любой при  $H = H_c$ . С таким

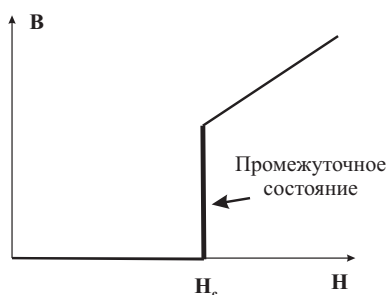


Рис. 14: Связь магнитной индукции с напряженностью в промежуточном состоянии сверхпроводника для длинного тонкого цилиндра

промежуточным состоянием мы уже сталкивались при рассмотрении задач о сфере и цилиндре во внешнем магнитном поле. Соответствующие кривые намагничения изображены на Рис.10.

## 5 Уравнение Лондонов и двухжидкостная гидродинамика сверхпроводников

### 5.1 Вариационный вывод уравнения Лондонов

До сих пор мы предполагали, что поле внутри сверхпроводника описывается простым утверждением, что  $\mathbf{B}_i = 0$ . Совершенно очевидно, что оно может быть правильным только в макроскопических сверхпроводниках и только вдали от поверхностей, вблизи которых течет экранирующий ток. Для более продвинутого описания, нам необходимо иметь уравнение, описывающее распределение электромагнитного поля внутри сверхпроводника. Рассмотрим для начала статический случай и применим для нахождения уравнения термодинамический принцип убывания свободной энергии. Естественно предположить, что энергия сверхпроводника складывается из энергии магнитного поля и энергии электронов, которые двигаются без трения. Эти электроны будем называть сверхпроводящими, их концентрацию обозначим  $n_s$ , а скорость  $\mathbf{v}_s$ , обе величины являются функциями радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки в пространстве и температуры. Тогда мы можем сразу же написать выражение для свободной энергии как сумму магнитной энергии и кинетической энергии сверхпроводящих электронов

$$F = \int_V \frac{B^2}{8\pi} + \frac{mn_s v_s^2}{2} dV. \quad (51)$$

Интегрирование в этом выражении осуществляется по объему сверхпроводника. Затем, выражая скорость  $\mathbf{v}_s$  через плотность тока сверхпроводящих электронов  $\mathbf{j}_s = en_s \mathbf{v}_s$  и используя уравнение Максвелла  $\text{rot} \mathbf{B} = 4\pi \mathbf{j}_s$ , нетрудно преобразовать выражение для свободной энергии к виду

$$F = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{B}^2 + \lambda^2 (\text{rot} \mathbf{B})^2 dV, \quad \text{где } \lambda^{-2} = \frac{4\pi n_s e^2}{mc^2}, \quad (52)$$

Здесь  $\lambda$ - параметр, называемый Лондоновской длиной или глубиной. Этот параметр, как мы увидим впоследствии, будет определять глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Чтобы получить уравнение для магнитного поля, в соответствии с принципом убывания свободной энергии потребуем, чтобы вариационная производная от свободной энергии по магнитному полю равнялась нулю, именно

$$\frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} = 0. \quad (53)$$

Напомним определение вариационной производной, являющейся обобщение понятия обычной производной. Для нахождения производной функционала  $G[f(x)]$  необходимо записать его вариацию  $\delta G[f] = G[f + \delta f] - G[f]$  в форме

$$\delta G = \int \frac{\delta G}{\delta f} \delta f dx, \quad (54)$$

т.е. ядро интегрального оператора функционала вариации является функциональной производной. Вычислим вариацию свободной энергии 52 в соответствии с этим правилом

$$\delta F = \frac{1}{4\pi} \int (\mathbf{B} \delta \mathbf{B}) + \lambda^2 (\text{rot} \mathbf{B} \text{rot} \delta \mathbf{B}) dV, \quad (55)$$

вариация независимой функции в это выражение входит не только как  $\delta \mathbf{B}$  но и как  $\text{rot} \delta \mathbf{B}$ . Для того чтобы в выражение для вариации входило только  $\delta \mathbf{B}$  преобразуем последний член с помощью 'интегрирования по частям', выделив из него полную дивергенцию. Используя формулу  $\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \text{brot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot} \mathbf{b}$  с  $\mathbf{a} = \text{rot} \mathbf{B}$  и  $\mathbf{b} = \delta \mathbf{B}$  получим следующее тождество

$$\text{div}[\text{rot} \mathbf{B} \times \delta \mathbf{B}] = \delta \mathbf{B} \bullet \text{rot} \text{rot} \mathbf{B} - \text{rot} \delta \mathbf{B} \bullet \text{rot} \mathbf{B},$$

используя которое преобразуем интеграл к виду

$$\delta F = \frac{1}{4\pi} \int_V [\mathbf{B} + \lambda^2 (\text{rot} \text{rot} \mathbf{B})] \delta \mathbf{B} dV - \frac{1}{4\pi} \oint_S [\text{rot} \mathbf{B} \times \delta \mathbf{B}] d\mathbf{S}, \quad (56)$$



полагая, что на границе области интегрирования вариация поля  $\delta\mathbf{B}|_S = 0$ , и требуя, чтобы вариация свободной энергии обращалась в ноль при произвольной  $\delta\mathbf{B}$  внутри области  $V$ , мы приходим к, так называемому, уравнению Лондонов

$$\mathbf{B} + \lambda^2 \text{rot rot} \mathbf{B} = 0, \quad (57)$$

описывающему распределение магнитного поля внутри сверхпроводника.

Применим полученное уравнение для решения простой задачи о проникновении поля в сверхпроводник, занимающий полупространство  $x > 0$ , см. Рис.15. Пусть магнитное поле направлено по  $z$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 B$ , тогда электрический ток направлен по  $y$ -  $\mathbf{j} = \mathbf{y}_0 j$ ,

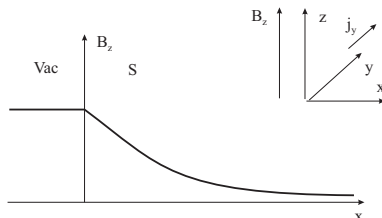


Рис. 15: Проникновение статического магнитного поля в сверхпроводник

Уравнение Лондонов 57 в этом случае становится одномерным и приобретает вид

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \lambda^{-2} B = 0. \quad (58)$$

Его решение, удовлетворяющее условию ограниченности при  $x \rightarrow \infty$  и непрерывности при  $x = 0$  имеет вид

$$B = B_0 \exp -\frac{x}{\lambda},$$

откуда видно, что  $\lambda$  есть характерная глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

## 5.2 Две простые одномерные задачи на уравнение Лондонов

В этом разделе рассмотрим 2 простые одномерные задачи о распределении магнитного поля и тока в сверхпроводящем слое конечной толщины. Слой с толщиной  $d$  будем считать сосредоточенным при  $-d/2 < x < d/2$  и бесконечным в  $z, y$  направлениях. Геометрия задач и система координат показана на Рис.16 В этих задачах есть только одна компонента индукции магнитного поля  $B_z = B$

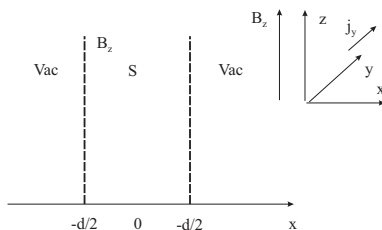


Рис. 16: Слой сверхпроводника, система координат и ориентация поля и тока

и одна компонента плотности тока  $j_y = j$ , зависящие от одной координаты  $x$ .

### 5.2.1 Пленка во внешнем магнитном поле

Рассмотрим сначала задачу о заданном внешнем поле. Необходимо решить одномерное уравнение

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} - \lambda^{-2} B = 0, \quad (59)$$

с симметричными граничными условиями  $B(\pm d/2) = B_0$ . В силу симметрии выбора координат и граничных условий решение уравнения 59 легко находится. Нетрудно видеть, что выражение для индукции

$$B = B_0 \frac{\cosh(x/\lambda)}{\cosh(d/(2\lambda))}$$

удовлетворяет и уравнению и граничным условиям. Для того, чтобы изобразить его графически, введем безразмерную координату  $\xi = 2x/d$ , изменяющуюся в интервале  $-1 < \xi < 1$ , и параметр  $\zeta = d/(2\lambda)$ , определяющий соотношение толщины слоя и лондоновской глубины проникновения. Решение для магнитного поля в этих переменных примет вид

$$B = B_0 \frac{\cosh(\xi\zeta)}{\cosh(\zeta)},$$

и легко может быть построено при различных  $\zeta$ . Соответствующие графики приведены на Рис.17

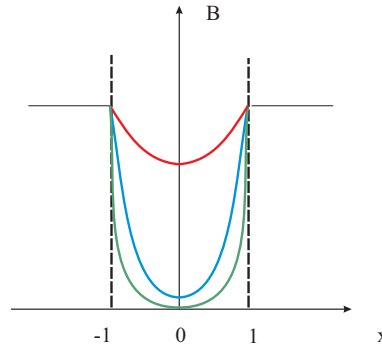


Рис. 17: Проникновение статического магнитного поля в слой сверхпроводника конечной толщины, параметр  $\zeta \ll 1$  для верхней кривой,  $\zeta \sim 1$  - для средней, и  $\zeta \gg 1$  для самой нижней.

### 5.2.2 Пленка с током

В отличие от предыдущей задачи, сейчас будем считать внешнее магнитное поле отсутствующим, а ток будем считать текущим по пленке против оси  $y$ . Интегрируя уравнение Максвелла

$$-\frac{dB}{dx} = \frac{4\pi}{c} j,$$

найдем скачок магнитного поля на пленке  $[B] = 2H_I$ , где  $H_I = 2\pi I/c$ , а  $I$ -полный ток на единицу длины вдоль оси  $z$ . Теперь мы должны решить уравнение 59 с антисимметричными граничными условиями  $B(\pm d/2) = \pm H_I$ . Это решение, как нетрудно убедиться имеет вид

$$B = H_I \frac{\sinh(x/\lambda)}{\sinh(d/(2\lambda))} = H_I \frac{\sinh(\xi\zeta)}{\sinh(\zeta)}.$$

Определения переменных  $\zeta, \xi$  полностью аналогичны предыдущей задаче. Соответствующие графики для разных  $\zeta$  приведены на Рис.18

## 5.3 Двухжидкостная гидродинамика сверхпроводников. Динамический вывод уравнения Лондонов

Сделаем естественные предположения о динамике электронов в сверхпроводнике. Предположим, что сверхпроводник состоит из электронов двух сортов, нормальных и сверхпроводящих, и неподвижных ионов, формирующих кристаллическую решетку. Будем считать, что сверхпроводящие

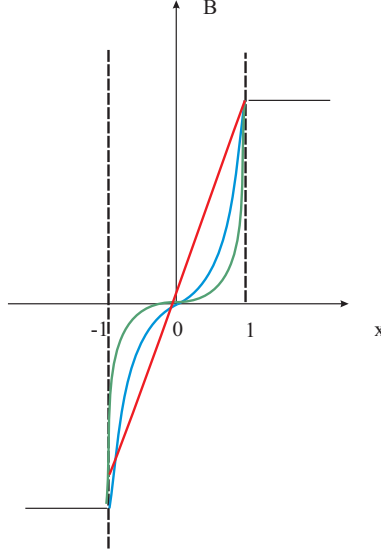


Рис. 18: Проникновение статического магнитного поля в слой сверхпроводника конечной толщины, параметр  $z \ll 1$  для верхней кривой,  $z \sim 1$  - для средней, и  $z \gg 1$  для самой нижней

электроны не испытывают трения со стороны кристаллической решетки, в отличие от нормальных электронов. Будем описывать эти две электронные жидкости гидродинамическими уравнениями

$$\dot{n}_s + \text{div} n_s \mathbf{v}_s = 0, \quad (60)$$

$$m n_s [\dot{\mathbf{v}}_s + (\mathbf{v}_s \nabla) \mathbf{v}_s] + \nabla p_s = n_s e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}] \right\}, \quad (61)$$

$$\dot{n}_n + \text{div} n_n \mathbf{v}_n = 0, \quad (62)$$

$$m n_n [\dot{\mathbf{v}}_n + (\mathbf{v}_n \nabla) \mathbf{v}_n] + \nabla p_n = \mathbf{f} + n_n e \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_n \times \mathbf{B}] \right\}. \quad (63)$$

Рассмотрим с помощью этих уравнений динамику электронов в поле поперечной электромагнитной волны, такой, что  $\text{div} \mathbf{E} = 0$ . Считая амплитуду волны не слишком большой, так что скорости электронов малы по сравнению со скоростью света  $v_{s,n} \ll c$  мы сможем пренебречь в уравнениях 60 членами  $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}_s$  и  $\frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$ . Из условия поперечности поля  $\text{div} \mathbf{E} = 0$  следует  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ , что, в свою очередь приводит к утверждению, что возмущения плотности и давления равны нулю  $\dot{n} = 0$ ,  $\nabla p(n) = 0$  и концентрации электронов  $n_s$ ,  $n_n$  постоянны. В данной теории они являются феноменологическими функциями температуры, которые должны быть определены из условия достаточно хорошего совпадения с экспериментом. Уравнения 60 резко упрощаются и принимают вид

$$\dot{\mathbf{v}}_s = \frac{e \mathbf{E}}{m}, \quad \dot{\mathbf{v}}_n + \nu \mathbf{v}_n = \frac{e \mathbf{E}}{m}, \quad (64)$$

где мы приняли следующее приближение для силы трения нормальных электронов об ионы  $\mathbf{f} = -m n_n \nu \mathbf{v}_n$ . Параметр  $\nu$  называется эффективной частотой столкновений.

Найдем с помощью этих уравнений материальную связь для сверхпроводника, связь между током

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_s + \mathbf{j}_n, \quad \mathbf{j}_s = e n_s \mathbf{v}_s, \quad \mathbf{j}_n = e n_n \mathbf{v}_n,$$

и электрическим полем, которая дается оператором проводимости  $\mathbf{j} = \hat{\sigma} \mathbf{E}$ . Перепишем уравнения 64 в виде

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{\omega_s^2}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial t} + \nu \mathbf{j}_n = \frac{\omega_n^2}{4\pi} \mathbf{E}, \quad \omega_{s,n}^2 = \frac{4\pi e^2 n_{s,n}}{m}, \quad (65)$$

где  $\omega_{s,n}$  - плазменные частоты сверхпроводящих и нормальных электронов, и, отыскивая решения в виде  $\sim e^{-i\omega t}$ , найдем выражение для проводимости

$$\sigma(\omega) = \sigma_s + \sigma_n = -\frac{\omega_s^2}{4\pi i\omega} - \frac{\omega_n^2}{4\pi i(\omega + i\nu)}, \quad (66)$$

состоящее из двух вкладов, сверхпроводящего и нормального. При частотах электромагнитного поля, удовлетворяющих условию  $\omega \ll \nu$  нормальная часть проводимости постоянна и дается выражением Друде  $\sigma_n = \omega_n^2/4\pi\nu$ . Часто, при описании электромагнитного поля в веществе, вместо проводимости используют другую функцию отклика, диэлектрическую проницаемость  $\epsilon$ , вводя вектор электрической индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \epsilon\mathbf{E}$ , и записывая электрический ток  $\mathbf{j}$  как ток поляризации  $\mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$ . Связь между  $\epsilon$  и  $\sigma$  дается простым выражением  $\epsilon = 1 - \frac{4\pi\sigma}{i\omega}$  откуда для диэлектрической проницаемости сверхпроводника имеем

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega + i\nu)}. \quad (67)$$

Записывая уравнения Максвелла в виде

$$\text{rot}\mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mathbf{B} \quad (68)$$

$$\text{rot}\mathbf{B} = -i\frac{\omega}{c}\epsilon\mathbf{E}, \quad (69)$$

и исключая электрическое поле, получим уравнение

$$\text{rot rot}\mathbf{B} - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\mathbf{B} = 0, \text{ или } \Delta\mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega)\mathbf{B} = 0. \quad (70)$$

Нетрудно видеть, что в статическом пределе, т.е. при  $\omega \rightarrow 0$ , это уравнение переходит в уравнение Лондонов 57 с  $\lambda = c/\omega_s$ , полученное ранее с помощью вариационного метода. В этом пределе удобно записывать материальное соотношение 66 для сверхпроводника в виде связи тока и векторного потенциала  $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{A}/\partial t$ . Предполагая, что для потенциала выбрана кулоновская калибровка, мы получим

$$\mathbf{j} = -\frac{\omega_s^2}{4\pi c}\mathbf{A} = -\frac{c}{4\pi}\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{A}. \quad (71)$$

Зная материальную связь, можно решать любые задачи о распределении поля в сверхпроводниках. В качестве примера рассмотрим задачу об отражении плоской электромагнитной волны от сверхпроводника.

#### 5.4 Поверхностный импеданс сверхпроводника и глубина скин-слоя

Решим с помощью выведенных уравнений 70 задачу о нормальном падении электромагнитной волны из вакуума на сверхпроводник с диэлектрической проницаемостью 71, заполняющий полупространство  $x > 0$ . Пусть есть только  $E_y = E$ ,  $B_z = B$  компоненты электромагнитной волны. Для полей слева и справа от границы соответственно имеем

$$E = E_0(e^{ikx} + Re^{-ikx}), \quad B = E_0(e^{ikx} - Re^{-ikx}), \quad k^2 = \omega^2/c^2, \quad x < 0, \quad (72)$$

$$E = TE_0e^{ik_s x}, \quad B = TE_0\frac{ck_s}{\omega}e^{ik_s x}, \quad k^2 = \epsilon(\omega)\omega^2/c^2, \quad x > 0 \quad (73)$$

Отношение тангенциальных компонент полей на поверхности называется поверхностным импедансом  $Z = E_t a u / B_\tau$  и для поверхностного импеданса из 72 имеем простое выражение  $Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon(\omega)}}$ , где  $\epsilon$  - диэлектрической проницаемость сверхпроводника. Коэффициенты отражения и прохождения следуют из условия непрерывности тангенциальных компонент полей при  $x = 0$  и легко выражаются через поверхностный импеданс

$$R = \frac{Z - 1}{Z + 1}, \quad T = \frac{2}{Z + 1}.$$

Наряду с поверхностным импедансом часто используют понятие комплексной глубины проникновения, определяемой как  $\lambda^{-1} = E_x/E = ik_s = i(\omega/c)\sqrt{\varepsilon}$ . Эта величина несет ту же информацию, что и поверхностный импеданс и непосредственно с ним связана  $Z = i(\omega/c)\lambda$ . Толщиной скин-слоя обычно называют величину  $\delta = \text{Re}\lambda$ . Нетрудно видеть, что определенные таким образом величины  $\delta$ ,  $\lambda$  в статическом пределе переходят в Лондоновскую глубину проникновения, определенную ранее 52. Действительно

$$\lambda^{-1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_s^2}{\omega^2} - \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega + i\nu)}} = \frac{\omega_s}{c}.$$

Важным результатом этого параграфа является наблюдение, что сверхпроводник не обладает потерями только на нулевой частоте. Нетрудно показать, что коэффициент поглощения, определенный как

$$Q = 1 - |R|^2$$

отличен от нуля при конечных  $\omega$ . Однако, он может быть довольно малым, и с этим обстоятельством связано широкое использование сверхпроводящих материалов, в частности Nb, для создания высокочастотных СВЧ резонаторов. Такие резонаторы, например, широко используются в ускорителях заряженных частиц.

## 6 Феноменологическая теория Гинзбурга-Ландау

### 6.1 Идея общей теории фазовых переходов. Структура параметра порядка для сверхпроводника. Свободная энергия для пространственно-однородного сверхпроводника

В теории Лондонов, рассмотренной в предыдущих лекциях, концентрация сверхпроводящих электронов  $n_s$  была феноменологическим параметром, который становился не равным нулю при температуре ниже критической. Другими словами, мы должны были просто предположить наличие фазового перехода, не имея никаких средств для описания фазового перехода. Идея феноменологической теории фазовых переходов базируется на теории бифуркаций, перестройки фазового пространства динамической системы при изменении параметров. Для того, чтобы возникла аналогия с динамической системой, нам необходимо сконструировать динамическую переменную и уравнения для неё, зависящие от термодинамических параметров, например, таких как температура и давление. Тогда бифуркационная диаграмма динамического уравнения будет аналогична фазовой диаграмме теории фазовых переходов.

Феноменологическая теория фазовых переходов, первый вариант которой был разработан Кюри и Вейссом в 1905 г. для описания ферромагнитного состояния, строится следующим образом. Выбирается функция, называемая параметром порядка, которая будет представлять макроскопическую динамическую переменную, такую, что её равновесное значение по одну сторону фазового перехода равно нулю, а по другую - не равно. Фаза, где параметр порядка отличен от нуля, называется упорядоченной, фаза с нулевым параметром порядка - неупорядоченной. Приведем примеры параметров порядка для разных типов фазовых переходов, отличающих фазы с различной симметрией

- Переход парамагнетик - ферромагнетик. Параметр порядка - вектор намагниченности  $\mathbf{M}$ , возникающий при фазовом переходе. В парамагнитной фазе  $M = 0$ , в ферромагнитной  $M \neq 0$ . Парамагнитная фаза симметрична относительно вращений в пространстве, в ферромагнитной фазе эта симметрия будет спонтанно нарушена.
- Параметр порядка отличающий жидкость и твердое тело - упругий сдвиговый модуль. В жидкости он равен нулю, в твердом теле - нет.
- За параметр порядка, отличающий кристалл от аморфного или жидкого тела, можно принять вид спектра корреляционной функции электронной плотности  $\langle n(\mathbf{r})n(\mathbf{r} + \xi) \rangle$ , - в кристалле спектр дискретный, в аморфном теле - непрерывный.

В качестве параметра порядка для сверхпроводника можно было бы выбрать  $n_s$  - концентрацию сверхпроводящих электронов. Такая теория, основанная на этом выборе, была построена Гортером и Казимиром, но не имела большого успеха. Вообще, построение феноменологической теории и угадывание структуры параметра порядка, требует либо знания микроскопической природы фазового перехода, либо экспериментальной информации о симметрии параметра порядка, либо должно просто повезти, как Гинзбургу и Ландау. Они разработали свою феноменологическую теорию в то время, когда не существовало микроскопической теории.

Гинзбург и Ландау предложили в качестве параметра порядка для сверхпроводника использовать комплексную функцию  $\Psi(\mathbf{r})$ , так чтобы плотность сверхпроводящих электронов  $n_s$  была пропорциональна  $|\Psi|^2$ . Я думаю, что Гинзбургом и Ландау двигала аналогия с одночастичной квантовой механикой, в которой такими соотношениями связана волновая функция и вероятность нахождения частицы в окрестности точки  $x$ .

Если параметр порядка выбран таким образом, то в отсутствие магнитного поля, очевидно, что все физические величины сверхпроводника будут функцией  $n_s \sim |\Psi|^2$  и следовательно, инвариантны относительно фазовых вращений  $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha}$ .

Следующий этап состоит в конструировании свободной энергии, как функционала от параметра порядка  $F[\Psi]$ . Для того чтобы его сконструировать, предположим что фазовый переход в сверхпроводящее состояние происходит путем фазового перехода второго рода, так что параметр порядка

в окрестности фазового перехода мал, как показано на Рис.19, так что свободная энергия разложима в ряд Тейлора по параметру порядка, точнее по  $n_s$ . Итак, предполагая параметр порядка не

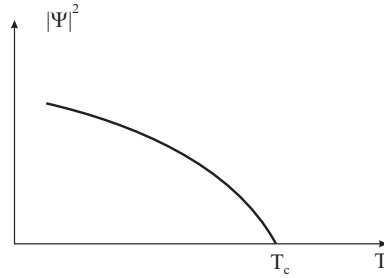


Рис. 19: Зависимость параметра порядка от температуры в окрестности фазового перехода

зависящим от координат, запишем свободную энергию в окрестности фазового перехода в виде

$$F(\psi) = F_0(V, T) + a(V, T)V|\Psi|^2 + b(V, T)V\frac{|\Psi|^4}{2}, \quad (74)$$

и дальнейшими членами разложения пренебрежем. В соответствии с общими правилами, уравнение для параметра порядка получается из условия минимума свободной энергии, имеющего вид  $\partial F/\partial\Psi^* = \partial F/\partial\Psi = 0$ . Коэффициенты разложения  $a, b$  должны быть аналитическими функциями температуры в окрестности фазового перехода, который будем считать происходящим при некоторой критической температуре  $T_c$ , следовательно мы можем написать следующее разложение

$$a(T) = a_0 + a_1(T - T_c) + \dots; \quad b(T) = b_0 + b_1(T - T_c) + \dots$$

и ограничиться первыми не исчезающими членами этих разложений, т.е. будем считать, что в окрестности фазового перехода

$$F_0 = \text{const}, \quad a(T) = \alpha(T - T_c), \quad b(T) = b = \text{const}. \quad (75)$$

Из соображений термодинамической устойчивости необходимо, чтобы свободная энергия была ограничена снизу, и, следовательно должно быть  $b > 0$ , кроме того мы хотим чтобы при  $T > T_c$  у нас была нормальная фаза с  $\Psi = 0$ , то должно быть  $\alpha > 0$ . Покажем, что написанная модель дает фазовый переход. Проварьируем по  $\Psi^*$  свободную энергию

$$F(\psi) = F_0 + aV|\Psi|^2 + bV\frac{|\Psi|^4}{2}, \quad (76)$$

и приравняв её нулю, мы получим следующее уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial\Psi^*} = a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = \Psi(a + b|\Psi|^2) = 0, \quad (77)$$

откуда найдем что всегда существует решение  $\Psi = 0$ , которое соответствует минимуму  $F$  при  $a > 0$  или при  $T > T_c$ . При  $a < 0$  возникает нетривиальное (ненулевое) решение

$$|\Psi|^2 = -\frac{a}{b}. \quad (78)$$

График свободной энергии при температурах выше и ниже фазового перехода показан на Рис.20. Итак, нам удалось с помощью указанного построения описать фазовый переход. Оценим порядок членов, учтенных в разложении свободной энергии 76. Считая, что параметр порядка в окрестности фазового перехода мал  $\Psi \sim \mu$  (за  $\mu$  мы обозначили малый параметр  $\mu \ll 1$ ) нетрудно видеть, что все члены, учтенные в разложении свободной энергии 76 имеют порядок  $b\mu^4$ . Действительно, из

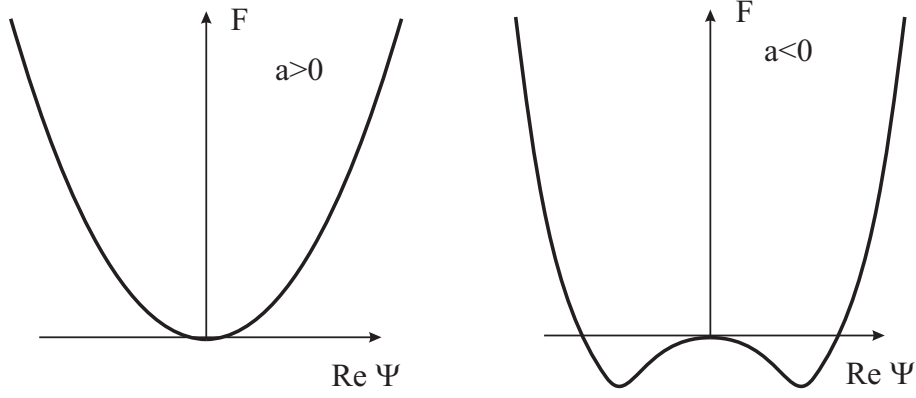


Рис. 20: Зависимость свободной энергии от параметра порядка при температурах выше и ниже точки фазового перехода

78 следует, что  $a \sim b\mu^2$  мало в окрестности перехода и оба члена одинакового порядка малости  $a|\Psi|^2 \sim b|\Psi|^4 \sim b\mu^4$ . Отброшенные члены имеют высший порядок малости  $\sim \mu^6$ . Отбрасывание высших членов разложения будет незаконным, если только в силу каких либо причин коэффициент разложения  $b$  станет аномально малым.

Кратко можно резюмировать что мы сделали,

- мы выбрали параметр порядка, обладающий определенной симметрией, в нашем случае симметрией относительно фазовых вращений. Такие фазовые преобразования параметра порядка, как мы увидим, тесно связаны с калибровочными преобразования потенциалов электромагнитного поля, и поэтому их тоже называют калибровочными
- предположили, что свободная энергия инвариантна относительно выбранных преобразований симметрии, и тем самым зависит только от инварианта  $|\Psi|^2$
- предположили, что свободная энергия аналитическим образом зависит от термодинамических параметров и инварианта  $|\Psi|^2$ , разложили её в ряд, и ограничились двумя членами.
- при фазовом переходе возник ненулевой параметр порядка  $\Psi \neq 0$ , который нарушил исходную симметрию.

Теперь можно использовать полученные результаты для вычисления термодинамических функций сверхпроводника. Подставляя найденное значение параметра порядка 78 в выражение для свободной энергии 76 найдем свободную энергию в сверхпроводящем и нормальном состояниях

$$F_s = F(|\Psi|^2 = a/b) = F_0 + a \left(-\frac{a}{b}\right) V + \frac{b a^2}{2 b^2} = F_0 - \frac{a^2}{2b} V, \quad F_n = F(\Psi = 0) = F_0. \quad (79)$$

Вспоминая теперь определение критического магнитного поля как разность плотностей свободных энергий в нормальном и сверхпроводящем состоянии 48

$$F_s + \frac{H_c^2}{8\pi} V = F_n,$$

мы найдем выражение для критического магнитного поля через коэффициенты  $a, b$  теории Гинзбурга-Ландау

$$\frac{H_c^2(T)}{8\pi} = \frac{a^2}{2b} = \frac{\alpha^2}{2b} (T - T_c)^2. \quad (80)$$



Далее, дифференцируя свободную энергию по температуре  $S = -\partial F/\partial T$  найдем изменение энтропии и скачок теплоемкости при  $S - N$  переходе

$$S_s = S_n + \frac{\alpha^2}{b}V(T - T_c), \quad C_s = C_n + \frac{\alpha^2}{b}VT_c$$

Заметим, что до сих пор проведенное развитие теории Гинзбурга-Ландау и полученные результаты совершенно не были связаны со структурой и симметрией параметра порядка. Мы бы могли принять за параметр порядка  $n_s$ , написать свободную энергию в форме

$$F(\psi) = F_0 + aVn_s + b\frac{n_s^2}{2},$$

дифференцируя которую по  $n_s$  мы бы получили те же самые результаты. Именно так поступили Гортер и Казимир при построении своей теории. Разница возникает при обобщении теории на пространственно неоднородный случай и учете взаимодействия с магнитным полем.

## 6.2 Обобщение на пространственно-неоднородный случай

Теперь вооруженные представлениями о том как нужно конструировать свободную энергию, попробуем обобщить теорию на пространственно неоднородный случая. Первый шаг, который мы должны сделать, это считать в 76 параметр порядка зависящим от координат  $\Psi(\mathbf{r})$  и заменить умножение на объем интегрированием по  $d^3r = dV$ ,

$$F[\Psi] = F_0 + \int a|\Psi(\mathbf{r})|^2 + b\frac{|\Psi(\mathbf{r})|^4}{2}dV,$$

Свободная энергия становится функционалом от  $\Psi$ , аргумент которого пишем в квадратных скобках. Однако, этой процедуры недостаточно. При учете пространственной неоднородности функционал свободной энергии может зависеть и от производных различных порядков от параметра порядка по координатам. Естественно, что эти члены с производными в свободной энергии должны быть инвариантны относительно фазовых вращений. Если же сверхпроводник еще и изотропен, то функционал  $F$  должен инвариантен и относительно пространственных вращений, т.е. зависеть от скалярных комбинаций от  $\nabla\Psi$ . Мы выпишем для примера, возможные члены

$$F[\Psi] = F_0 + \int a|\Psi(\mathbf{r})|^2 + b\frac{|\Psi(\mathbf{r})|^4}{2} + c|\nabla\Psi|^2 + d|\Delta\Psi|^2 + e|\Psi|^2|\nabla\Psi|^2 + \dots dV,$$

Будем считать, что масштаб неоднородности  $l$  параметра порядка велик, так что  $l^{-1} \sim \mu$ , тогда градиент  $\nabla\Psi \sim \mu^2$ . В этом случае только член  $|\nabla\Psi|^2$  имеет такой же порядок  $\mu^4$  как и оставленные в 76 члены. Окончательно имеем следующее выражение для функционала свободной энергии, учитывающее слабую пространственную неоднородность.

$$F[\Psi] = F_0 + \int a|\Psi(\mathbf{r})|^2 + b\frac{|\Psi(\mathbf{r})|^4}{2} + c|\nabla\Psi|^2dV,$$

Из соображений термодинамической устойчивости, заключающейся в требовании ограниченности функционала свободной энергии, следует, что коэффициент  $c = \chi^2 > 0$ .

Для получения уравнения, описывающего равновесное распределение параметра порядка вычислим вариацию этого функционала, считая  $\delta\Psi$  и  $\delta\Psi^*$  независимыми функциями

$$\delta F = \int \{\chi^2\nabla\Psi\nabla\delta\Psi^* + a\Psi\delta\Psi^* + b|\Psi|^2\Psi\delta\Psi^*\}dV + c.c. \quad (81)$$

Представив член  $\nabla\Psi\nabla\delta\Psi^*$  в виде

$$\nabla\Psi\nabla\delta\Psi^* = \text{div}\delta\Psi^*\nabla\Psi - \delta\Psi^*\Delta\Psi$$

и преобразовав член с  $\text{div}$  в интеграл по поверхности сверхпроводника, для вариации свободной энергии получим выражение

$$\delta F = \int \{-\chi^2 \Delta \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi\} \delta\Psi^* dV + \oint (\mathbf{n} \bullet \nabla \Psi) \delta\Psi^* dS + c.c., \quad (82)$$

содержащее объемный и поверхностный вклад. Требуя равенства нулю объемной части вариации

$$\delta F = \int \frac{\delta F}{\delta \Psi^*} \delta \Psi^* dV + c.c.$$

при произвольных  $\delta \Psi^*$ ,  $\delta \Psi$  найдем уравнение для параметра порядка

$$-\chi^2 \Delta \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0.$$

Из равенства нулю поверхностного вклада при произвольном  $\delta \Psi|_S$  следует граничное условие на границе сверхпроводник-вакуум

$$(\mathbf{n} \bullet \nabla \Psi)|_S = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  нормаль к поверхности сверхпроводника.

Нормировка параметра порядка, т.е. его связь с  $n_s$  и выбор коэффициентов  $a, b, \chi^2$ , до сих пор были произвольными. Единственное требование - лишь бы выражение 81, и в частности,  $\chi^2 |\nabla \Psi|^2 V$ , имело размерность энергии. Для выбора коэффициентов воспользуемся следующими соображениями.

Уравнение для параметра порядка напоминает квантовомеханическое уравнение Шредингера для частицы и его можно интерпретировать как уравнение для макроскопической волновой функции конденсата сверхпроводящих электронов. В соответствии с аналогией с квантовой механикой выберем значение коэффициента  $\chi^2$  равным  $\chi^2 = \hbar^2/2m^*$ , где  $m^*$  масса элементарного носителя. В настоящее время известно, что носителями заряда в сверхпроводнике являются куперовские пары - коррелированные состояния двух электронов, их масса и заряд определяются соотношениями  $m^* = 2m$ ,  $e^* = 2e$  где  $m, e$  - масса и заряд электрона. Такой выбор коэффициента  $\chi^2$  ведет к тому, что  $|\Psi|^2$  будет представлять концентрацию куперовских пар, так что  $n_s = 2|\Psi|^2$ .

Суммируя наши соглашения о выборе коэффициентов в выражении для свободной энергии и нормировке параметра порядка как концентрации куперовских пар мы выпишем выражение для свободной энергии

$$F[\Psi] = F_0 + \int \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \Psi|^2 + a|\Psi|^2 + b \frac{|\Psi|^4}{2} dV, \quad (83)$$

уравнение для распределения параметра порядка

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \Delta \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0, \quad (84)$$

и граничные условия

$$(\mathbf{n} \bullet \nabla \Psi)|_S = 0, \quad (85)$$

полученные из условия минимума функционала 83.

Используя решение уравнения 84 можно вычислить свободную энергию 83 в сверхпроводящем состоянии. Чтобы это сделать, выразим  $|\nabla \Psi|^2$  в 83 с помощью соотношения  $|\nabla \Psi|^2 = -\Psi^* \Delta \Psi + \text{div} \Psi^* \nabla \Psi$  и учтем выполнение уравнения 84 и граничного условия 85

$$\begin{aligned} F[\Psi] &= F_0 + \int \frac{\hbar^2}{4m} |\nabla \Psi|^2 + a|\Psi|^2 + b \frac{|\Psi|^4}{2} dV = \\ &F_0 + \int \Psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{4m} \nabla \Psi + a\Psi + \frac{b}{2} |\Psi|^2 \Psi \right] dV + \int \Psi^* \nabla \Psi d\mathbf{S} = F_0 + \int -\frac{b}{2} |\Psi|^4 dV, \end{aligned} \quad (86)$$

Поделив все члены уравнения 84 на  $a$ , которая в сверхпроводящем состоянии отрицательна, мы увидим, что параметр  $\hbar^2/(4m|a|)$  имеет размерность квадрата длины. Эта длина представляет собой

характерный пространственный масштаб уравнения Гинзбурга-Ландау, она обозначается буквой  $\xi$  и называется длиной когерентности

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{4m|a|}} = \frac{\hbar}{\sqrt{4m\alpha(T_c - T)}}. \quad (87)$$

Её зависимость от температуры изображена на Рис.21. Полученные уравнения позволяют описывать

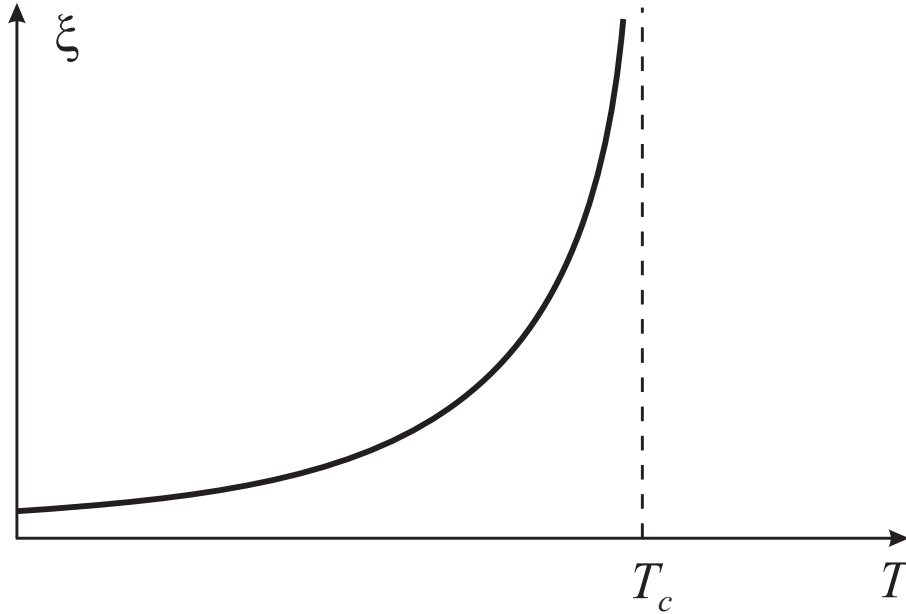


Рис. 21: Зависимость длины когерентности от температуры

пространственно неоднородные распределения параметра порядка в неоднородных сверхпроводниках. Неоднородность химического состава состояния сверхпроводников будет выражаться зависимостью коэффициентов  $a, b, \chi^2$  от координат. В частности, уравнением Гинзбурга-Ландау может быть описан и параметр порядка в нормальном металле, где, в соответствии с 75 мы должны считать  $a > 0$ . В качестве примера изучим распределение параметра порядка на границе между двумя нормальным и сверхпроводящим металлом.

### 6.3 Эффект близости

Геометрия задачи вид приведена на Рис.22. Будем считать, что с точки зрения рассматриваемой феноменологической теории два соприкасающихся металла 1, 2 различаются коэффициентами  $a_1, a_2$  и будем считать, что при рассматриваемой температуре  $T$   $a_1 > 0, a_2 < 0$ , так что слева мы имеем сверхпроводник, а справа- нормальный металл. Границу между сверхпроводниками будем считать резкой в масштабе длин когерентности, так что можно воспользоваться кусочно постоянной аппроксимацией функции  $a(x)$ , как показано на Рис.22 б), но в тоже время плавной, чтобы было применимо дифференциальное уравнение Гинзбурга-Ландау

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + a(x)\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0, \quad (88)$$

где  $a$  меняется в узкой области перехода, а за границами этой области постоянна. Заметим также, что параметр порядка может быть выбран действительным. Интегрируя уравнение по области перехода нетрудно получить граничные условия связывающие поля слева и справа от переходной

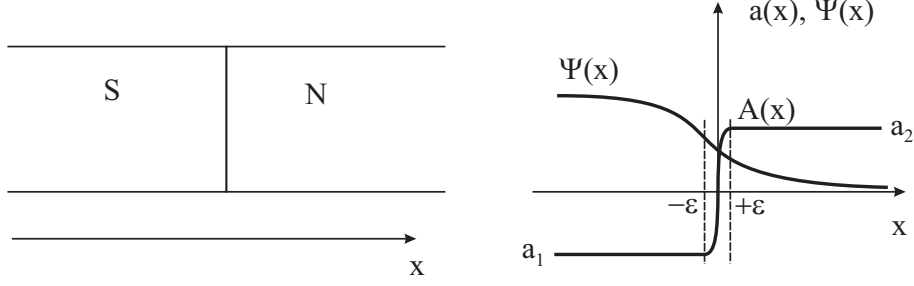


Рис. 22: Эффект близости - проникновение сверхпроводимости в нормальный металл

области, которые выражают непрерывность функции и её производной слева и справа от скачка  $a$ .

$$\Psi(-0) = \Psi(+0), \quad \Psi_x(-0) = \Psi_x(+0).$$

В глубине нормальной области  $x \rightarrow \infty$  параметр порядка должен стремиться к нулю, а в глубине сверхпроводника - к своему равновесному значению  $\sqrt{|a_1|/b}$  Уравнение 88 с постоянным  $a$

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + a\Psi + b\Psi^3 = 0, \quad (89)$$

может быть решено точно и его решение выражается через эллиптические функции Якоби, а при наших граничных условиях эти функции Якоби еще и вырождаются в элементарные функции. Чтобы это показать, заметим, что домножая на  $\Psi_x$ , мы можем свести его к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ -\frac{\hbar^2}{4m} \Psi_x^2 + a\Psi^2 + \frac{b}{2} \Psi^4 \right\} = 0,$$

откуда находим первый интеграл

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \Psi_x^2 + a\Psi^2 + \frac{b}{2} \Psi^4 = C = \text{const} \quad (90)$$

Рассмотрим это уравнение для области сверхпроводника, где  $a = a_1 < 0$ . Находя из граничного условия при  $x \rightarrow -\infty$  значение постоянной  $C = -|a_1|^2/(2b)$  запишем уравнение для области  $x < 0$

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \Psi_x^2 + \frac{b}{2} \left( \Psi^2 - \frac{|a_1|}{b} \right)^2 = 0,$$

откуда сразу же следует решение

$$\Psi^- = \sqrt{\frac{|a_1|}{b}} \tanh \left( \frac{\sqrt{2m|a_1|}}{\hbar} (x - x_1) \right),$$

где  $x_1$  - произвольная постоянная. Рассматривая уравнение ГЛ в форме 90 для нормального металла, из граничных условий, что при  $x \rightarrow \infty$   $\Psi \rightarrow 0$  мы найдем значение постоянной  $C = 0$ , и уравнение для параметра порядка в нормальном металле

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \Psi_x^2 + \frac{b}{2} \Psi^2 \left( \Psi^2 + \frac{|a_2|}{b} \right) = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\Psi^+ = \sqrt{\frac{a_2}{b}} \sinh^{-1} \left( \frac{\sqrt{2ma_2}}{\hbar} (x - x_2) \right).$$

Требую непрерывности параметра порядка  $\Psi^- = \Psi^+$  и его производной  $\Psi_x^- = \Psi_x^+$  при  $x = 0$  мы найдем неопределенные постоянные  $x_{1,2}$  и тем самым решение поставленной задачи. Вид решения изображен на Рис.22. Главным результатом этого параграфа является обнаружение эффекта близости, что при контакте сверхпроводника и нормального металла, в нормальном металле в узкой области возникает наведенная сверхпроводимость. В свою очередь, нормальный металл портит сверхпроводимость (уменьшает  $\Psi$ ) в сверхпроводнике.

#### 6.4 Калибровочная инвариантность и взаимодействие с магнитным полем. Уравнения Гинзбурга-Ландау.

Взаимодействие с магнитным полем основывается на уже обсуждавшейся аналогии уравнения 84 с уравнением Шредингера. Напомним, как входит магнитное поле в уравнения квантовой механики - уравнение Шредингера. Выпишем хорошо вам известное уравнение Шредингера для волновой функции одной свободной частицы в отсутствие электромагнитного поля

$$i\hbar\dot{\psi} = \frac{\hat{p}^2}{2m^*}\psi = \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla)^2\psi; \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla, \quad (91)$$

где  $m^*$  -масса частиц. Затем запишем уравнение в присутствии электромагнитного поля, описываемого векторным  $\mathbf{A}$  и скалярным  $\varphi$  потенциалами

$$i\hbar\dot{\psi} = \frac{(\hat{p} - e^*/c\mathbf{A})^2}{2m^*}\psi + e^*\varphi\psi = \frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A})^2\psi + e^*\varphi\psi, \quad (92)$$

где  $e^*$  -заряд частицы, и заметим, что уравнение 91 отличается от 92 заменой временных и пространственных производных на ковариантные или "удлиненные"производные

$$-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}, \quad \text{и} \quad i\partial_t \rightarrow i\partial_t - e^*\varphi, \quad (93)$$

где  $\mathbf{A}$ ,  $\varphi$  - векторный и скалярный потенциал электромагнитного поля, связанные с полевыми векторами  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  соотношениями

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi. \quad (94)$$

Вхождение потенциалов в квантовую теорию в виде 93 обеспечивает калибровочную инвариантность, знакомую вам по курсу классической электродинамики.

Остановимся несколько на понятии калибровочной инвариантности. Потенциалы электромагнитного поля определены неоднозначно. Как легко видеть из 94 электрическое и магнитное поля останутся неизменными, если мы подвергнем потенциалы калибровочному преобразованию,

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} \quad (95)$$

Нетрудно также видеть что классическая механика, как релятивистская, так и нерелятивистская, инвариантны относительно калибровочного преобразования, поскольку уравнения движения частиц могут быть записаны в форме, когда электромагнитное поле входит в них только через силу Лоренца

$$\mathbf{F} = e^*\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}],$$

куда входят только поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , которые калибровочно инвариантны. В квантовой же механике, уравнение движения частицы - уравнение Шредингера 92, явным образом содержит потенциалы, и казалось бы не может быть калибровочно инвариантным. Однако, если мы наряду с 95 преобразуем фазу волновой функции  $\psi \rightarrow \psi e^{ie^*f/\hbar c}$ , т.е. сформулируем калибровочные преобразования как

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f, \quad \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \psi \rightarrow \psi e^{ie^*f/\hbar c}, \quad (96)$$

то нетрудно проверить, что при таком преобразовании уравнение Шредингера, в которое временные и пространственные производные входят в виде 93 останется неизменным, поскольку добавка к потенциалу будет скомпенсирована производной от фазы

$$[-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}(\mathbf{A} + \nabla f)]\psi e^{ie^*f/(\hbar c)} = e^{ie^*f/(\hbar c)}[-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A}]\psi, \quad (97)$$

$$[i\hbar\partial_t - e^*(\varphi - \frac{1}{c}\partial_t f)]\psi e^{ie^*f/(\hbar c)} = e^{ie^*f/(\hbar c)}[i\hbar\partial_t - e^*\varphi]\psi \quad (98)$$

и не равный нулю множитель  $e^{ie^*f/(\hbar c)}$  пронесется через все уравнение. В силу этого же равенства при калибровочном преобразовании 96 остается инвариантной любая физическая величина, которая, как известно, выражается как среднее от

$$\psi^* Q(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A})\psi,$$

где  $Q(\hat{p})$  произвольная функция оператора  $\hat{p}$ , понимаемая как разложение в ряд Тейлора. Таким образом и квантовая и классическая механика, как и электродинамика являются калибровочно инвариантными. Калибровочная инвариантность в настоящее время является стандартным требованием, которому должна удовлетворять нормальная физическая теория.

Потребуем, чтобы и наша теория Гинзбурга-Ландау включала взаимодействие с электромагнитным полем калибровочно инвариантным образом, подобно квантовой механике. Вспоминая, что заряд и масс куперовской пары  $e^* = 2e, m^* = 2m$ , можно заключить, что мы должны заменить пространственные производные в выражении для свободной энергии 83 на "удлиненные"  $-i\hbar\nabla \rightarrow -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A}$ , и добавить выражение для магнитной энергии, в результате придем к следующему выражению для свободной энергии теории Гинзбурга-Ландау

$$F[\Psi] = F_0 + \int \frac{1}{4m}|(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + a|\Psi|^2 + b\frac{|\Psi|^4}{2} + \frac{1}{8\pi}(\text{rot}\mathbf{A})^2 dV. \quad (99)$$

Теперь, требуя экстремальности свободной энергии по отношению к параметру порядка и векторному потенциалу, который теперь тоже является динамической переменной, получим следующие условия

$$\frac{\delta F}{\delta \Psi^*} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta \Psi} = 0, \quad \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} = 0.$$

Первые две вариации мы можем заново не вычислять, совершенно очевидно, что они приведут к калибровочно инвариантному обобщению уравнения 84 и граничного условия для параметра порядка 85, которые мы можем получить путем замены производных на "удлиненные" и сразу же записать

$$\frac{1}{4m}(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})^2\Psi + a\Psi + b|\Psi|^2\Psi = 0, \quad (100)$$

$$(\mathbf{n} \bullet (-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi)|_S = 0, \quad (101)$$

Уравнение же для векторного потенциала придется вывести путем непосредственного вычисления вариационной производной. Представим полную свободную энергию как сумму свободных энергий вещества и поля

$$F = F_{\text{matter}} + F_{\text{field}},$$

где

$$F_{\text{matter}} = F_0 + \int \frac{1}{4m}|(-i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A})\Psi|^2 + a|\Psi|^2 + b\frac{|\Psi|^4}{2} dV \quad (102)$$

$$F_{\text{field}} = \int \frac{1}{8\pi}(\text{rot}\mathbf{A})^2 dV$$

и вычислим сначала вариацию полевой части

$$\delta F_{\text{field}} = \int \frac{1}{4\pi} (\text{rot} \mathbf{A})(\text{rot} \delta \mathbf{A}) dV.$$

Здесь область интегрирования - все пространство, а не объем сверхпроводника  $V_s$ ,  $V = V_s + V_{out}$ . Преобразуя  $\delta F_{\text{field}}$  с использованием формулы

$$\text{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot} \mathbf{b}, \quad \mathbf{a} = \delta \mathbf{A}, \quad \mathbf{b} = \text{rot} \mathbf{A},$$

мы найдем для объемной части

$$\delta F_{\text{field}} = \int \frac{1}{4\pi} (\text{rot} \text{rot} \mathbf{A}) \delta \mathbf{A} dV.$$

откуда мы найдем, что

$$\frac{\delta F_{\text{field}}}{\delta \mathbf{A}} = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \text{rot} \mathbf{A}.$$

Это выражение представляет часть уравнения Максвелла

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (103)$$

откуда следует, что плотность тока дается выражением

$$\mathbf{j} = -c \frac{\delta F_{\text{matter}}}{\delta \mathbf{A}}. \quad (104)$$

Поскольку функционал  $F_{\text{matter}}$  не содержит пространственных производных по  $\mathbf{A}$  мы можем просто записать, что

$$\mathbf{j} = -c \frac{\delta F_{\text{matter}}}{\delta \mathbf{A}} = -c \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \frac{1}{4m} |(-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}) \Psi|^2,$$

и окончательно записать выражение для тока

$$\mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A}. \quad (105)$$

В заключение параграфа приведем сводку уравнений Гинзбурга-Ландау и граничных условий на границе сверхпроводника и вакуума

$$\frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A})^2 \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (\mathbf{n} \bullet (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}) \Psi)|_S = 0, \quad (106)$$

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{A} - \frac{4\pi}{c} \left[ -\frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \mathbf{A} \right] = 0, \quad [\mathbf{B}_\tau] = 0, \quad (107)$$

а также формулу, выражающую свободную энергию 99 на решениях уравнения Гинзбурга Ландау, представляющую обобщение формулы 108 на случай ненулевого магнитного поля

$$F[\Psi] = F_0 + \int -\frac{b}{2} |\Psi|^4 + \frac{B^2}{8\pi} dV. \quad (108)$$

## 6.5 Различные формы записи тока в теории Гинзбурга-Ландау. Связь с теорией Лондонов.

Представим комплексный параметр порядка в форме  $\Psi = |\Psi| e^{i\theta}$  и подставим в выражение для тока 105. Поскольку

$$-i(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = 2|\Psi|^2 \nabla \theta,$$

то выражение для тока может быть представлено в виде

$$\mathbf{j} = \frac{e}{m} |\Psi|^2 \left( \hbar \nabla \theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) = en_s \mathbf{v}_s, \text{ где } n_s = 2|\Psi|^2, \quad (109)$$

а сверхскорость  $\mathbf{v}_s$  введена соотношением

$$2m\mathbf{v}_s = \hbar \nabla \theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A}. \quad (110)$$

Еще раз подчеркнем калибровочную инвариантность теории. В приводимых выражениях для тока это следует из факта, что векторный потенциал содержится только в комбинации с градиентом фазы параметра порядка  $\hbar \nabla \theta - 2(e/c)\mathbf{A}$ .

Рассмотрим ситуацию, когда можно пренебречь изменением параметра порядка в пространстве и считать его однородным. Из уравнения 100 что это возможно при слабом магнитном поле и однородных  $a, b$ . Запишем уравнение Максвелла 103 с током в форме 109

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \frac{e}{m} |\Psi|^2 \left( \hbar \nabla \theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (111)$$

и обратим внимание на его схожесть с уравнением Лондонов. Поэтому, часто приближение однородного параметра порядка называют лондоновским приближением. Если мы введем Лондоновскую длину обычным соотношением

$$\lambda^{-2} = \frac{4\pi e^2 n_s}{mc^2} = \frac{8\pi e^2 |\Psi|^2}{mc^2}, \quad (112)$$

то это уравнение запишется в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{\lambda^2} \left( \mathbf{A} - \frac{\hbar c}{2e} \nabla \theta \right).$$

Отсюда следует еще одно часто применяемое в лондоновском приближении выражение для тока

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \left( \frac{\hbar c}{2e} \nabla \theta - \mathbf{A} \right).$$

Найдем зависимость Лондоновской глубины проникновения от параметров теории  $a, b$  и, следовательно, от температуры. Поскольку однородное решение уравнения ГЛ 100 есть

$$|\Psi|^2 = -a/b, \text{ то } \lambda^{-2} = \frac{8\pi e^2 |a|}{bmc^2}.$$

Температурная зависимость лондоновской глубины показана на Рис.23.

Обратим внимание, что лондоновская глубина и длина когерентности имеют одинаковую температурную зависимость в рассматриваемой теории и, поэтому, их отношение  $\lambda/\xi$  называемое параметром Гинзбурга-Ландау  $\varkappa = \lambda/\xi$  от температуры не зависит.

## 6.6 Система единиц Гинзбурга-Ландау. Обезразмеривание уравнений.

Обычно бывает удобным ввести безразмерные переменные, чтобы избавиться от несущественных параметров задачи и привести интересующие нас уравнения к безразмерному виду. Проведем процедуру обезразмеривания уравнений Гинзбурга-Ландау. Начнем с уравнения для параметра порядка 100, которое запишем в виде

$$\frac{\hbar^2}{4m} (-i\nabla - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A})^2 \Psi + a\Psi + b|\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (113)$$



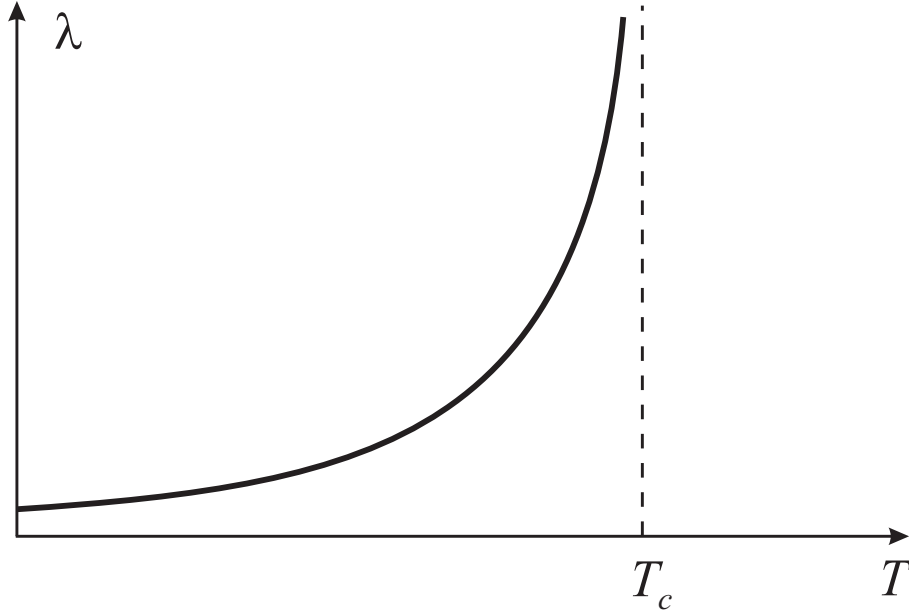


Рис. 23: Зависимость Лондоновской глубины проникновения когерентности от температуры

В качестве единицы параметра порядка удобно ввести величину  $\Psi_0 = \sqrt{\frac{-a}{b}}$ . Поделим это уравнение на  $-|a|$  и тогда для безразмерного параметра порядка  $\psi = \Psi_{dl} = \Psi/\Psi_0$  получим

$$\left(-i\xi\nabla - \frac{2e\xi}{\hbar c}\mathbf{A}\right)^2\psi + a\psi + b|\psi|^2\psi = 0. \quad (114)$$

Безразмерный векторный потенциал естественно ввести как  $\mathbf{A}_{dl} = 2e\xi/(\hbar c)\mathbf{A}$ , выбрав в качестве единицы измерения векторного потенциала  $\hbar c/(2e\xi) = \Phi_0/(2\pi\xi)$ . Выбор единицы длины неоднозначен, поскольку мы имеем две характерные длины  $\lambda$  и  $\xi$ . В соответствии с традицией, мы выберем в качестве единицы длины  $\lambda$ , введя безразмерную координату  $x_{dl}$  соотношением  $x_{dl} = x/\lambda$ . Отношение двух характерных длин теории  $\varkappa = \lambda/\xi$  называется параметром Гинзбурга-Ландау и представляет фундаментальный параметр теории. Уравнение для параметра порядка приобретает простой вид

$$(-i\varkappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0,$$

содержащее единственный параметр  $\varkappa$ . Нетрудно проверить, что и в уравнении для магнитного поля не останется никаких параметров, кроме параметра Гинзбурга-Ландау и в безразмерных переменных оно приобретет вид

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{i}{2\varkappa}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - |\Psi|^2\mathbf{A}.$$

Итак, вводя следующие основные единицы измерения

- 
- 
- 

$$1\Psi = \Psi_0 = \sqrt{\frac{-a}{b}},$$

$$1L = \lambda,$$

$$1A = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi},$$

- и параметр

$$\varkappa = \frac{\lambda}{\xi},$$

мы приводим систему уравнений Гинзбурга-Ландау к безразмерному виду

$$(-i\varkappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0, \quad (115)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{i}{2\varkappa}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - |\Psi|^2\mathbf{A}. \quad (116)$$

Используя основные единицы, можно построить все остальные. Например единица измерения магнитного поля находится из уравнения  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ , тока - из  $c \text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}$ ,

- 

$$1B = \frac{1A}{1L} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi\lambda} = \sqrt{2}H_c,$$

- 

$$1j = \frac{c1B}{4\pi 1L} = \frac{c\Phi_0}{8\pi^2\xi\lambda^2},$$

Кроме характерного магнитного поля  $1B$  у нас уже было введено другое поле - критическое магнитное поле  $H_c$  определенное соотношением

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = \frac{a^2}{2b}.$$

Очевидно, что эти два поля связаны и оказывается, что  $1B = \sqrt{2}H_c$ . Действительно,

$$1B = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi\lambda} = \frac{\hbar}{2e} \frac{\sqrt{4m|a|}}{\hbar} \frac{\sqrt{8\pi e^2|a|}}{c\sqrt{mb}} = \sqrt{2 \cdot 8\pi} \frac{a^2}{2b} = \sqrt{2}H_c.$$

Приведем еще выражение для безразмерного кванта потока

$$\Phi_0^{dl} = \frac{\Phi_0}{1B \cdot 1L^2} = \frac{2\pi\Phi_0\lambda\xi}{\Phi_0 \cdot \lambda_2} = \frac{2\pi}{\varkappa},$$

и для единицы объемной плотности свободной энергии и свободной энергии

$$1f = 1F/1V = \frac{1B^2}{8\pi} = \frac{H_c^2}{2\pi}, \quad 1F = \lambda^3 \frac{H_c^2}{4\pi}.$$

Выражение для свободной энергии через безразмерные переменные имеет вид

$$F[\Psi] = F_0 + \lambda^3 \frac{H_c^2}{4\pi} \int |(-i\varkappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})\Psi|^2 - |\Psi|^2 + \frac{|\Psi|^4}{2} + (\text{rot } \mathbf{A})^2 dV. \quad (117)$$

## 6.7 Действительная форма уравнений Гинзбурга-Ландау

Представим параметр порядка в форме

$$\Psi = f e^{i\theta} \quad (118)$$

и получим уравнения для модуля и фазы параметра порядка. Будем работать в безразмерных переменных, так что уравнения Гинзбурга-Ландау имеют вид 115

$$(-i\varkappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0, \quad (119)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{i}{2\varkappa}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - |\Psi|^2\mathbf{A}. \quad (120)$$

Уравнение для векторного потенциала при подстановке 118 приобретает вид

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = f^2 \mathbf{v}_s, \quad (121)$$

где

$$\mathbf{v}_s = \varkappa^{-1} \nabla \theta - \mathbf{A},$$

безразмерная сверхскорость 110. Чтобы записать уравнение для параметра порядка в переменных модуль-фаза, воспользуемся для простоты следующим приемом. Из калибровочной инвариантности очевидно, что векторный потенциал войдет в окончательный ответ только в калибровочно инвариантной форме, т.е. в виде  $\mathbf{v}_s$ . Поэтому при выводе уравнений мы можем положить  $A = 0$  и выразить ответ через  $v_s = \varkappa^{-1} \nabla \theta$ . Вычислим производные

$$\nabla \psi = e^{i\theta} (\nabla f + i f \nabla \theta),$$

$$\Delta \psi = \nabla \nabla \psi = e^{i\theta} (\Delta f + 2i \nabla f \nabla \theta + i f \Delta \theta - f (\nabla \theta)^2),$$

и подставив в уравнение для параметра порядка, разделим действительную и мнимую часть. Действительная часть дает уравнение для модуля параметра порядка

$$\varkappa^{-2} \Delta f + (1 - f^2 - v_s^2) f = 0, \quad (122)$$

а мнимая

$$2 \nabla f \nabla \theta + f \Delta \theta = 0$$

домножением на  $f \neq 0$  может быть сведена к виду

$$\operatorname{div} f^2 \mathbf{v}_s = 0, \quad (123)$$

представляющему уравнение непрерывности для сверхтока. Заметим, что это уравнение также может быть получено взятием операции  $\operatorname{div}$  от уравнения Максвелла 121. В заключение приведем выражение для свободной энергии сверхпроводника в переменных модуль-сверхскорость.

$$F[f, \mathbf{v}_s] = \int \varkappa^{-2} (\nabla f)^2 + f^2 v_s^2 - f^2 + \frac{f^4}{2} + (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2 dV. \quad (124)$$

## 7 Простейшие приложения теории Гинзбурга-Ландау

### 7.1 Квантование потока

Рассмотрим задачу о распределении магнитного поля в неодносвязном сверхпроводнике, представляющем собой длинную узкую трубу, как показано на верхнем Рис.24. Толщину стенки  $d = R_2 - R_1$  будем считать большой в масштабе лондоновской глубины проникновения  $d \gg \lambda$ . Из уравнения

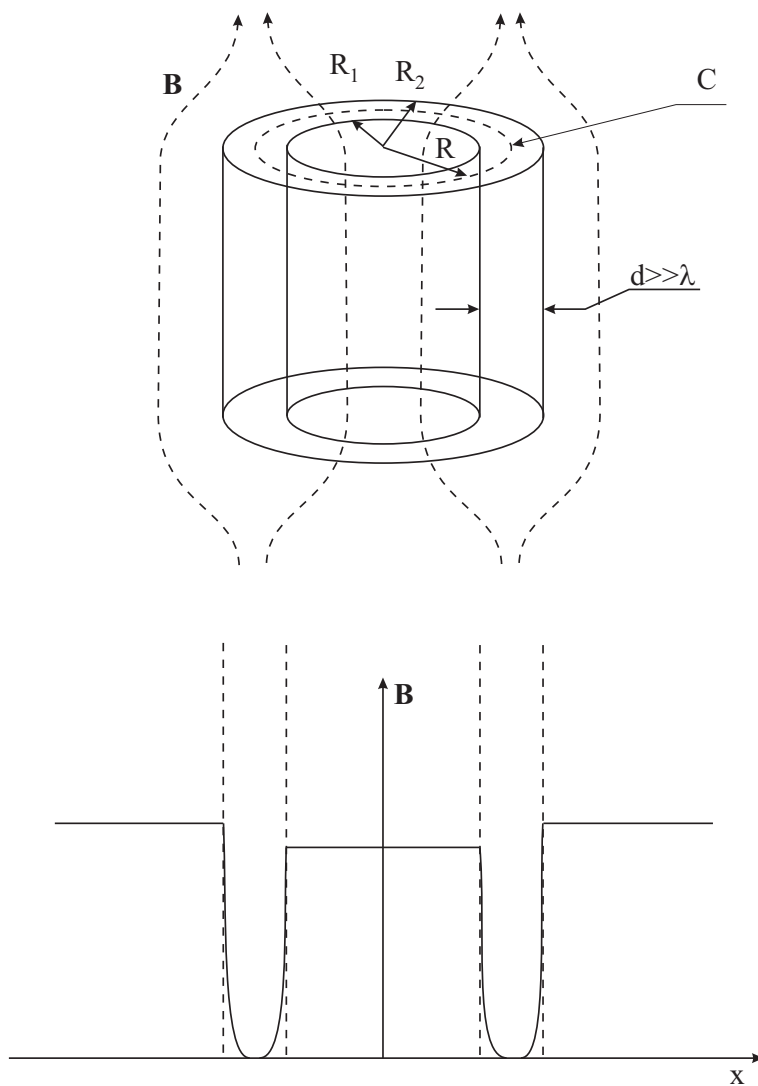


Рис. 24: Верхняя картинка - сверхпроводящий цилиндр с дыркой, помещенный в магнитное поле и картина силовых линий. Нижняя - распределение магнитного поля вдоль диаметральной координаты.

для параметра порядка 100 и граничного условия 101 в случае достаточно слабого магнитного поля, когда можно пренебречь слагаемым  $\sim A^2$ , следует, что параметр порядка постоянен внутри сверхпроводника,  $\Psi = \Psi_0$ . Оставшееся уравнение для  $\mathbf{A}$  103 с током 109 запишем в виде

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} 2e\Psi_0^2 (\hbar \nabla \theta - \frac{2e}{c} \mathbf{A}). \quad (125)$$

Беря операцию rot от этого уравнения, получаем уравнение Лондонов для магнитного поля

$$\text{rot rot}\mathbf{B} + \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{B} = 0, \quad (126)$$

из которого следует, что магнитное поле  $B_z$ , и электрический ток  $j_\varphi$  в глубине сверхпроводника, вдалеке от внешней и внутренней поверхностей пренебрежимо малы. Распределение магнитного поля показано на Рис.24-б. Выберем контур  $C$ , целиком идущий по области, где ток равен нулю, и проинтегрируем по этому контуру выражение для тока  $\mathbf{j} = en_s\mathbf{v}_s$ . Поскольку  $n_s \neq 0$  мы получим соотношение

$$\oint_C \mathbf{v}_s d\mathbf{l} = 0, \Rightarrow \hbar \oint_C \nabla\theta d\mathbf{l} = \frac{2e}{c} \oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l}, \quad (127)$$

откуда, используя теорему Стокса для преобразования интеграла от векторного потенциала и определение магнитного потока,

$$\oint_C \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi, \quad (128)$$

получаем для магнитного потока через дыру

$$\Phi = \frac{\hbar c}{2e} \oint_C \nabla\theta d\mathbf{l}. \quad (129)$$

Может показаться, что интеграл по замкнутому контуру от градиента  $\theta$  равен нулю, однако, это не так. Из-за неодносвязности сверхпроводящей области и неопределенности фазы в дыре, контур  $C$  не может быть стянут в точку, теорема Стокса для  $\oint_C \nabla\theta d\mathbf{l}$  неприменима, и мы должны вычислять этот интеграл непосредственно. Поскольку ток имеет только  $\varphi$ -компоненту, только эту компоненту имеет и градиент фазы параметра порядка. Тогда, выбирая в качестве контура окружность радиуса  $R$  и записывая градиент в полярных координатах мы найдем

$$\oint_C \nabla\theta d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} R d\varphi = \theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi n, \quad (130)$$

где  $n$ - произвольное целое число. Последнее равенство -  $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi n$ , следует из однозначности параметра порядка. Итак, мы получили, что поток магнитного поля в отверстии может принимать квантованные значения

$$\Phi = n\Phi_0, \quad (131)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{gs} \cdot \text{cm}^2$$

величина, называемая квантом магнитного потока.

Каков будет захваченный в дыре поток зависит от начальных условий. Определим этот поток для следующего эксперимента. Пусть цилиндрический сверхпроводник с дыркой (Рис.24) при температуре  $T > T_c$  помещают в однородное магнитное поле  $\mathbf{H} \uparrow \uparrow \mathbf{z}$  и затем переводят в сверхпроводящее состояние охлаждением. Такие условия эксперимента называются охлаждением в поле, по-английски: Field Cooled или FC. Захваченный магнитный поток в этих условиях определяется из условия минимума свободной энергии  $\tilde{F}$  при постоянной напряженности магнитного поля  $H$ . Запишем выражение для свободной энергии системы

$$\tilde{F} = F - \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{B}\mathbf{H} dV \quad (132)$$

воспользовавшись выражением для свободной энергии в форме 108. Мы получим

$$\tilde{F} = F_0 - \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int H^2 dV}_{\tilde{F}_{nH}} + \int \frac{1}{8\pi} (B - H)^2 - \frac{b}{2} |\Psi|^4 dV. \quad (133)$$

Фигурной скобкой здесь обозначено выражение для свободной энергии  $\tilde{F}_{nH}$  нормального металла. Разбив последний интеграл на интегралы по дыре  $0 < r < R_1$ , по сверхпроводящему цилиндру  $R_1 < r < R_2$ , и наружи -  $r > R_2$ , для разности  $\Delta F = \tilde{F} - \tilde{F}_{nH}$  получим

$$\Delta F = L \int_0^{R_1} \frac{(B-H)^2}{8\pi} dS + L \int_{R_1}^{R_2} \left\{ \frac{(B-H)^2}{8\pi} - \frac{b}{2} |\Psi|^4 \right\} dS. \quad (134)$$

Последний интеграл практически не зависит от  $B$ , так как магнитное поле проникает в сверхпроводник только на толщину  $\lambda \ll R_2 - R_1$ . От магнитного поля зависит только вклад от отверстия, который представим в виде

$$\Delta F = L \int_0^{R_1} \frac{(B-H)^2}{8\pi} dS = \frac{(\Phi - \Phi_e)^2}{8\pi S} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi S} (n-x)^2, \quad (135)$$

При выводе этого соотношения мы учли однородность поля в дыре, квантованность потока, и ввели следующие переменные: поток поля  $B$  через отверстие -  $\Phi = BS = n\Phi_0$ , и величину  $\Phi_e = HS = x\Phi_0$ .

Мы должны найти целое число  $n$  - число захваченных квантов потока при фиксированном непрерывном параметре  $x$ , так чтобы функция  $(n-x)^2$  принимала наименьшее значение. Для решения этой задачи нарисуем график  $f(x) = (n-x)^2$  при различных  $n$ , который показан на Рис.25

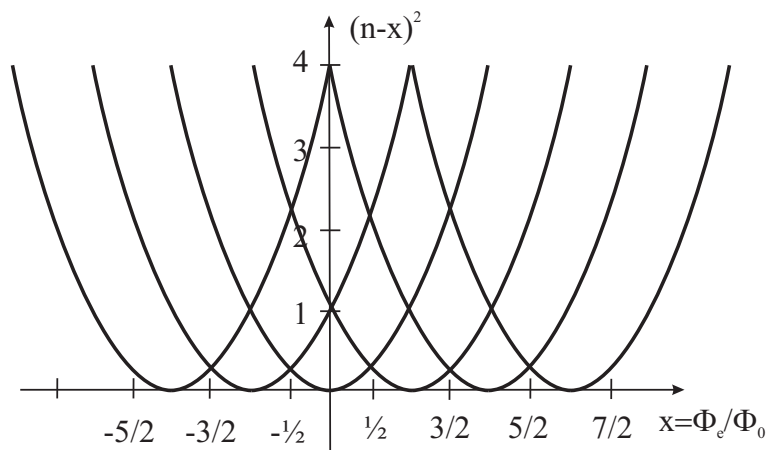


Рис. 25: Свободная энергия сверхпроводящего цилиндра с отверстием, в зависимости от безразмерного внешнего магнитного поля  $x = SH/\Phi_0$

Он представляет собой набор парабол с вершинами при  $x = n$ , откуда очевидно, что для минимальности свободной энергии целое число  $n$  должно быть выбрано ближайшим к  $x$  и зависимость магнитного потока от внешнего магнитного поля будет иметь ступенчатый вид, как показано на Рис.26

## 7.2 Критическое поле тонкой пленки

Рассмотрим задачу о сверхпроводящей пленке толщины  $d$ , помещенное в однородное магнитное поле, как показано на Рис.27. Пленку будем считать тонкой в масштабе обеих характерных длин  $d \ll \lambda, \xi$  или, в безразмерных переменных  $d \ll 1, \varkappa^{-1}$ .

Плоскость пленки - плоскость  $y, z$ , все переменные будут зависеть только от координаты  $x$ , нормальной к границе. В данной задаче имеются  $y$  компоненты тока  $j$  и векторного потенциала  $A$ , а также  $z$  компонента магнитного поля  $B_z = B$ . Параметр порядка может быть выбран действительным и уравнения Гинзбурга-Ландау, записанные в безразмерных переменных, приобретают вид

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \psi^2 A = 0 \quad (136)$$

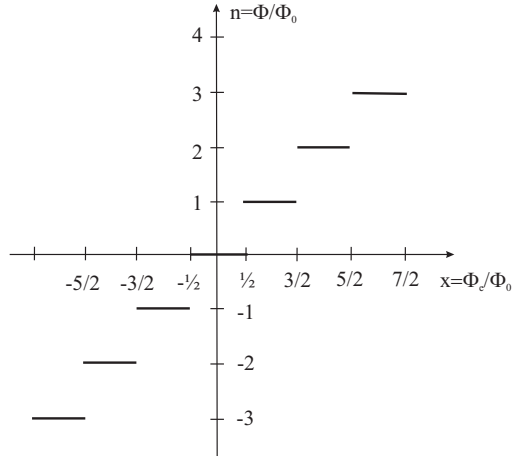


Рис. 26: Зависимость магнитного потока в отверстии сверхпроводящей трубы от безразмерного внешнего магнитного поля  $x = SH/\Phi_0$

$$\kappa^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 - A^2 - \psi^2)\psi = 0. \quad (137)$$

Они должны быть дополнены граничными условиями

$$\psi_x(x = \pm d/2) = 0, \quad A_x(x = \pm d/2) = H, \quad (138)$$

где  $H$  - внешнее магнитное поле. Наша задача - определить максимальное поле  $H$  при котором система 136, 137 имеет нетривиальное, сверхпроводящее решение. Поскольку  $\kappa d \ll 1$  будем строить решение уравнения для параметра порядка 137 в виде разложения по этому параметру

$$\psi = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots$$

Для этого запишем уравнение 137 в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\kappa^2(1 - A^2 - \psi^2)\psi,$$

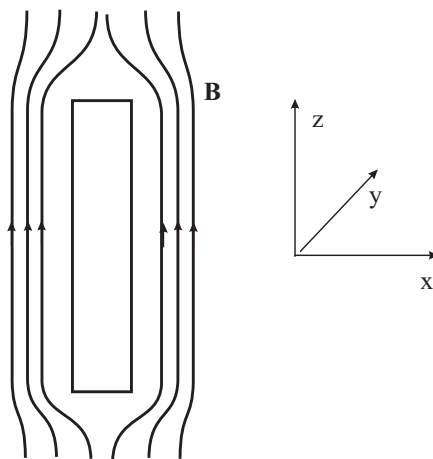


Рис. 27: Тонкая пленка в магнитном поле

откуда видно, что в нулевом порядке по  $\kappa d$  уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям есть некоторая постоянная  $\psi_0$ . Поскольку  $\psi$  постоянная в нулевом приближении, мы можем решить уравнение для векторного потенциала и найти общее решение

$$A = a \sinh \psi x + b \cosh \psi x,$$

где  $a, b$  - произвольные постоянные. Теперь, удовлетворяя граничным условиям для поля  $B = A_x$ , находим

$$A = \frac{H \sinh \psi x}{\psi \cosh(\psi d/2)}.$$

Используя условия тонкости пленки в масштабе  $\lambda$  мы можем разложить  $\sinh \psi x$  и  $\psi \cosh(\psi d/2)$  в ряд Тейлора и записать

$$A = Hx.$$

Теперь запишем уравнение для первой поправки  $\psi^1$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -\kappa^2(1 - A^2 - \psi_0^2)\psi_0. \quad (139)$$

Для того, чтобы это уравнение для поправки было разрешимо, необходимо чтобы интеграл от правой части  $\int_{-d/2}^{d/2} R.H.S. dx$  равнялся нулю. Действительно, проинтегрировав уравнение 139 и учтя граничные условия, мы приходим к этому условию. Это условие является частным случаем теоремы Фредгольма, утверждающей, что вырожденная неоднородная задача имеет решение только тогда, когда вектор правой части ортогонален собственному вектору сопряженной задачи. В нашем случае задача

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f$$

с нашими граничными условиями самосопряжена и её собственный вектор const. Условие разрешимости есть условие ортогональности правой части и const. Запишем условие разрешимости

$$(1 - \psi_0^2)d = H^2 \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx$$

и из него найдем уравнение для параметра порядка

$$(1 - \psi_0^2) = \frac{2H^2 d^2}{24},$$

и из условия  $\psi^2 > 0$  найдем критическое поле тонкой пленки

$$H = \frac{2\sqrt{3}}{d} \text{ или в размерных переменных } H = H_c \lambda \frac{2\sqrt{6}}{d}.$$

Главным результатом этой задачи является утверждение, что для тонкой пленки  $d \ll \lambda$  критическое поле пленки значительно превышает термодинамическое критическое поле.

### 7.3 Критический ток тонких пленок и проволок. Ток распаривания

Рассмотрим задачу о сверхпроводящей пленке толщины  $d$ , по которой протекает ток с плотностью  $I$  на единицу длины вдоль  $z$ . Картина магнитного поля и геометрия задачи показана на Рис.28. Как и в предыдущем разделе, пленку будем считать тонкой в масштабе обеих характерных длин  $d \ll \lambda, \xi$  или, в безразмерных переменных  $d \ll 1, \kappa^{-1}$ .



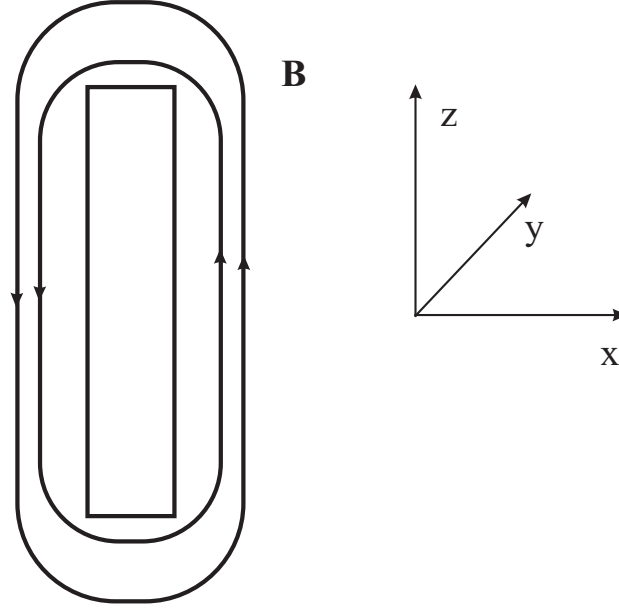


Рис. 28: Тонкая пленка в магнитном поле

Плоскость пленки - плоскость  $y, z$ , все переменные будут зависеть только от координаты  $x$ , нормальной к границе. В данной задаче имеются  $y$  компоненты тока  $j$  и векторного потенциала  $A$ , а также  $z$  компонента магнитного поля  $B_z = B$ . Параметр порядка может быть выбран действительным и уравнения Гинзбурга-Ландау, записанные в безразмерных переменных, приобретают вид.

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \psi^2 A = 0, \quad (140)$$

$$\kappa^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 - A^2 - \psi^2) \psi = 0. \quad (141)$$

Они должны быть дополнены граничными условиями, несколько отличающимся от 138

$$\psi_x(x = \pm d/2) = 0, \quad A_x(x = \pm d/2) = \pm H_I, \quad (142)$$

где  $H_I$  - магнитное поле, создаваемое током, текущим по пленке. В безразмерных переменных

$$2H_I = I.$$

Наша задача - определить максимальное поле  $H_I$  или ток  $I$  при котором система 140-141 имеет нетривиальное, сверхпроводящее решение. Поскольку  $\kappa d \ll 1$  будем строить решение уравнения для параметра порядка 141 в виде разложения по этому параметру

$$\psi = \psi_0(x) + \psi_1(x) + \dots$$

Для этого запишем уравнение 141 в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\kappa^2 (1 - A^2 - \psi^2) \psi,$$

откуда видно, что в нулевом порядке по  $\kappa d$  уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0,$$

решение которого, удовлетворяющее граничным условиям есть некоторая постоянная  $\psi_0$ .

Поскольку  $\psi$  постоянная в нулевом приближении, мы можем решить уравнение для векторного потенциала и найти общее решение

$$A = a \sinh \psi x + b \cosh \psi x,$$

где  $a, b$  - произвольные постоянные. Теперь, удовлетворяя граничным условиям для поля  $B = A_x(\pm d/2) = \pm H_I$  находим

$$A = \frac{H_I \cosh \psi x}{\psi \sinh(\psi d/2)}.$$

Используя условия тонкости пленки в масштабе  $\lambda$  мы можем разложить  $\cosh \psi x$  и  $\psi \sinh(\psi d/2)$  в ряд Тейлора и записать

$$A = \frac{2H_I}{d\psi^2} = \frac{j}{\psi^2}.$$

Здесь мы ввели плотность тока  $j$ , учтя, что в этом приближении ток распределен равномерно по толщине. Теперь запишем уравнение для первой поправки  $\psi^1$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} = -\kappa^2(1 - A^2 - \psi_0^2)\psi_0. \quad (143)$$

Как и в предыдущем разделе, для того, чтобы это уравнение для поправки было разрешимо, необходимо чтобы интеграл от правой части  $\int_{-d/2}^{d/2} R.H.S. dx$  равнялся нулю. Запишем условие разрешимости

$$(1 - \psi_0^2)d = A^2 \int_{-d/2}^{d/2} dx,$$

и из него найдем уравнение для параметра порядка

$$(1 - \psi_0^2) - \frac{j^2}{\psi_0^4} = 0, \quad (144)$$

и из условия существования решения  $\psi_0^2 > 0$  найдем критический ток  $I$ . Для этого выразим ток через параметр порядка

$$j^2 = \psi_0^4 - \psi_0^6$$

и построим график зависимости  $j^2(\psi_0^2)$ , который приведен на Рис.29 откуда видно, что отличное от нуля решение для  $\psi_0$  возможно только для токов

$$j < \sqrt{4/27}.$$

Это максимальное значение тока называется током распаривания. Значение плотности тока распаривания в размерных переменных есть

$$j_{dp} = (1j)\sqrt{4/27},$$

где  $1j$  -единица плотности тока в естественной системе единиц Гинзбурга-Ландау. Соответствующее значение магнитного поля на поверхности пленки  $H_I = jd/2$  в безразмерных переменных, и

$$H_I = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} H_c \frac{d}{\lambda}$$

- в размерных  $B$  отличие от результата предыдущего раздела, критическое поле  $H_I$  для тонких пленок  $d \ll \lambda$  значительно меньше, чем критическое магнитное поле и убывает с убыванием толщины, в противоположность результату предыдущего раздела.

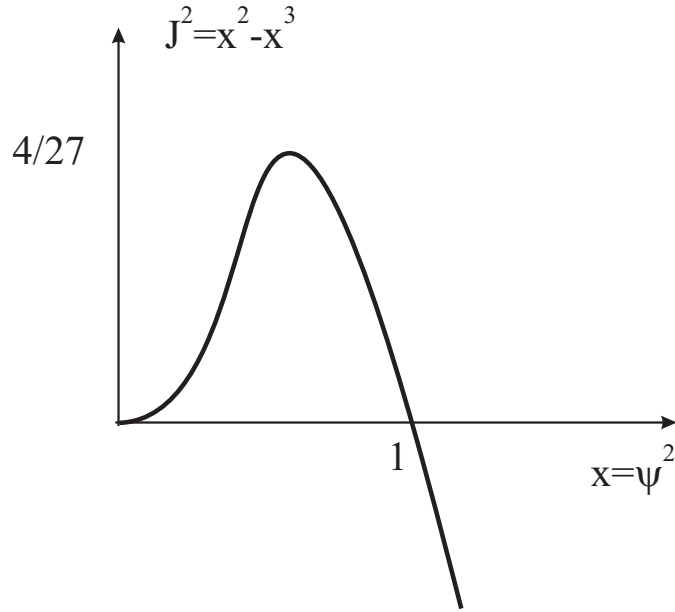


Рис. 29: Тонкая пленка в магнитном поле

Обратим внимание, что уравнение для параметра порядка 144 может быть легко получено также из уравнений Гинзбурга-Ландау в действительной форме 122. Действительно, предположив что  $f = \text{const}$  из 122 мы найдем

$$(1 - f^2 - v_s^2)f = 0.$$

Выражая сверхскорость через плотность тока  $j$  из условия постоянства тока

$$j = f^2 v_s,$$

придем к уже рассмотренному уравнению 144

$$1 - f^2 - \frac{j^2}{f^4} = 0.$$

Единственным условием применимости этого решения является условие постоянства параметра порядка и тока по поперечному сечению сверхпроводника. Оно заведомо будет выполнено для тонких проволочек с размерами, удовлетворяющими условиям  $d \ll \lambda, \xi$

## 7.4 Эксперимент Литгла-Паркса

Рассмотрим задачу о тоненьком колечке из сверхпроводника, помещенном в магнитное поле. Толщина колечка мала  $d \ll \lambda$ , так что магнитное поле не экранируется, в отличие от задачи о квантовании потока, рассмотренной в 7.1. Предположим, также, что параметр порядка однороден по толщине проволочки. Напишем выражение для сверхскорости

$$2m\mathbf{v}_s = \hbar\nabla\theta - \frac{2e}{c}\mathbf{A}$$

и проинтегрируем это выражение по контуру, идущему внутри кольца. Мы получим следующее выражение для скорости сверхпроводящих электронов

$$v_s = \frac{\hbar}{2mR}\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right),$$

где  $R$  радиус кольца,  $n$  - произвольное целое число

$$n = \frac{1}{2\pi} \oint \nabla \theta d\mathbf{l},$$

$\Phi$  -поток магнитного поля через кольцо,  $\Phi_0$ -квант потока. Заметим, что в рассматриваемой задаче о тонком кольце поток не квантован, величина  $x = \Phi/\Phi_0$  может принимать любые значения. Запишем теперь свободную энергию кольца, выразив её через модуль параметра порядка и сверхскорость. Здесь, по причинам которые станут понятны позже, мы работаем с размерными переменными.

$$F[f, \mathbf{v}_s] = \int \frac{\hbar^2}{4m} (\nabla f)^2 + f^2 m v_s^2 + a(T) f^2 + \frac{b f^4}{2} dV. \quad (145)$$

Здесь мы не написали энергию магнитного поля, поскольку она, для нашего случая тонкого неэкранирующего кольца, не зависит от состояния сверхпроводника. Нетрудно видеть, что член с кинетической энергией сверхпроводящих электронов, входит в свободную энергию также как член с  $a(T)$  и мы можем ввести эффективный коэффициент  $a_{eff}(T)$  как

$$a_{eff}(T) = a(T) + m v_s^2 = a(T) + \frac{\hbar^2}{4m^2 R^2} (n - x)^2.$$

Число накруток фазы  $n$  определяется из минимума свободной энергии, точно также как в задаче о квантовании потока в 7.1 и следовательно, график зависимости кинетической энергии

$$\frac{\hbar^2}{4m^2 R^2} (n - x)^2$$

от безразмерного потока  $x = \Phi/\Phi_0$  будет иметь вид, показанный на Рис.30. Эта же величина с обратным знаком будет давать сдвиг критической температуры сверхпроводящего колечка от магнитного поля. Такой эксперимент по измерению критической температуры тонких сверхпроводящих

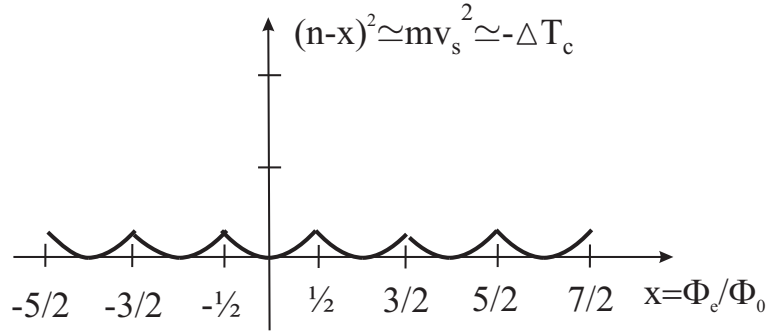


Рис. 30: Свободная энергия сверхпроводящего цилиндра с отверстием, в зависимости от безразмерного внешнего магнитного поля  $x = SH/\Phi_0$

колечек в магнитном поле был проведен Литтлом и Парксом.

## 7.5 Поверхностное натяжение равновесной N-S границы

Рассмотрим цилиндрический образец сверхпроводящего материала, помещенный в однородное магнитное поле, направленное вдоль  $z$ , и величина которого равна критическому значению  $H_c$ . При такой напряженности  $N$  и  $S$  фазы находятся в равновесии и мы предположим, что внутри образца имеется плоская фазовая граница, лежащая в плоскости  $y, z$ , как показано на Рис.31. Будем считать, что нормальная фаза лежит слева, при  $x < 0$ , а область границы называть окрестность

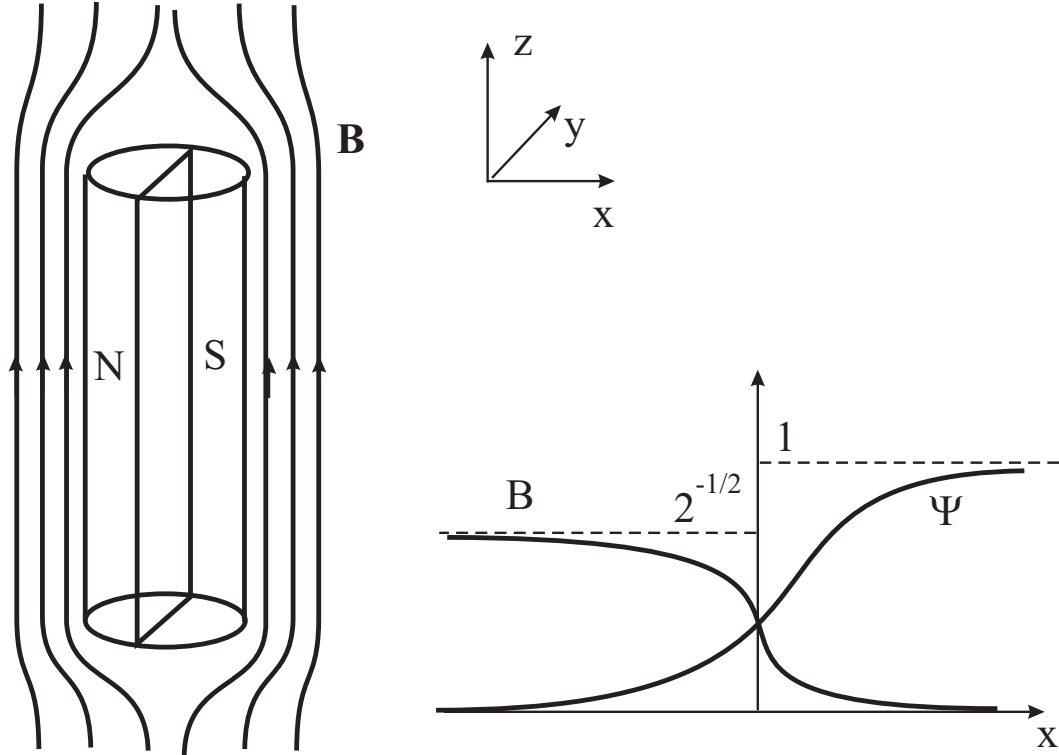


Рис. 31: Цилиндрический образец с нормальной и сверхпроводящей фазой. Показана картина силовых линий, система координат и распределение магнитной индукции и параметра порядка в окрестности NS границы

точки  $x = 0$ , где параметр порядка и магнитное поле меняются. Качественное распределение параметра порядка и магнитного поля приведено на Рис.31. Область границы имеет ширину порядка  $\lambda, \xi$

Вдалие от краев образца все переменные будут зависеть только от координаты  $x$ , - нормальной к границе. В данной задаче имеется  $y$  компоненты тока  $j$  и векторного потенциала  $A$ , а также  $z$  компонента магнитного поля  $B_z = B$  Параметр порядка может быть выбран действительным и уравнения Гинзбурга-Ландау, записанные в безразмерных переменных, приобретают вид,

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \psi^2 A = 0 \quad (146)$$

$$\kappa^{-2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + (1 - A^2 - \psi^2) \psi = 0. \quad (147)$$

Наша задача состоит в нахождении решений, удовлетворяющих граничным условиям в нормальной области

$$\psi \rightarrow 0, \quad B \rightarrow H_c = 1/\sqrt{2} \quad \text{при } x \rightarrow -\infty, \quad (148)$$

и сверхпроводящей области

$$\psi \rightarrow 1, \quad B \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (149)$$

и нахождении поверхностного вклада в свободную энергию. Выбор фазы параметра порядка соответствует определенному выбору калибровки, который, как видно из уравнения для параметра порядка соответствует требованию  $A \rightarrow 0, x \rightarrow \infty$ . Обозначим объемы сверхпроводящей и нормальной фаз как  $V_s$  и  $V_n$ , а площадь поверхности, разделяющей N и S фазы, как -  $\Sigma$ . Тогда мы можем

записать свободную энергию всего образца, как

$$F = f_s V_s + f_n V_n + \sigma \Sigma, \quad (150)$$

где  $\sigma$  - есть поверхностная плотность свободной энергии, называемая также коэффициентом поверхностного натяжения. Чтобы получить для него выражение мы должны выделить поверхностный вклад из общего выражения для свободной энергии 108. Запишем выражение для  $\tilde{F}$  нашего образца, как это мы уже делали при вычислении свободной энергии для сверхпроводящей трубы в п. 7.1, формула 133

$$\tilde{F} = F_0 - \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int H^2 dV}_{\tilde{F}_{nH}} + \int \frac{1}{8\pi} (B - H)^2 - \frac{b}{2} |\Psi|^4 dV. \quad (151)$$

Поскольку равновесие фаз возможно только при магнитном поле равном критическому, то мы должны положить в этой формуле  $H = H_c$  и получить выражение

$$\tilde{F} = F_0 - \underbrace{\frac{1}{8\pi} \int H^2 dV}_{\tilde{F}_{nH}} + \int \frac{1}{8\pi} (B - H_c)^2 - \frac{b}{2} |\Psi|^4 dV, \quad (152)$$

из которого следует, что последний интеграл и представляет собой искомый поверхностный вклад в свободную энергию. Действительно, в силу граничных условий 148,149 подынтегральное выражение локализовано около границы и интеграл пропорционален площади межфазной границы. Для коэффициента поверхностного натяжения, мы, таким образом получаем следующее выражение

$$\sigma = \int \frac{1}{8\pi} (B - H_c)^2 - \frac{b}{2} |\Psi|^4 dx, \quad (153)$$

или, переходя к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda \frac{H_c^2}{4\pi} \sigma_{dl} \\ \sigma_{dl} &= \int I dx = \int (B - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 - \frac{1}{2} |\Psi|^4 dx. \end{aligned} \quad (154)$$

Итак, мы должны решить уравнения 146 с граничными условиями 148,149 и вычислить коэффициент поверхностного натяжения 154. Мы решим эту задачу приближенно для двух предельных случаев: 1) -  $\kappa \gg 1$  и 2) -  $\kappa \ll 1$ .

Начнем с первого случая больших каппа  $\kappa \gg 1$ .

В этом случае уравнение для параметра порядка 146 содержит малый параметр  $\kappa^{-2}$  при старшей производной, и следовательно зависимость параметра порядка при переходе от нормальной области к сверхпроводящей будет представлять резкий скачок от нуля к единице, с масштабом  $2\varepsilon \sim \kappa^{-1}$  (или  $\xi$  в размерных координатах. На этом маленьком масштабе магнитное поле, как видно из уравнения для векторного потенциала, практически не меняется, (докажите это утверждение и оцените насколько меняется магнитное поле в этом слое) и следовательно мы можем считать, что чуть левее скачка, при  $x < -\varepsilon$ , магнитное поле подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0,$$

и дается выражением  $A_x = B = 1/\sqrt{2}$ , а при  $x > \varepsilon$  уравнению

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - A = 0$$

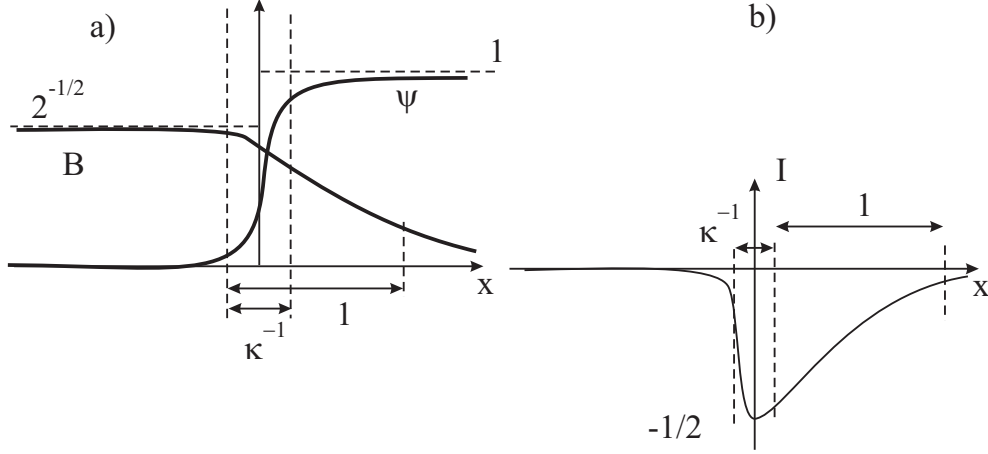


Рис. 32: Зависимость магнитного поля и параметра порядка -а) и плотности свободной энергии - б) от координаты в окрестности равновесной NS границы для большого  $\varkappa = \lambda/\xi \gg 1$

с решением  $A_x = B = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x}$ . Качественный вид решения в этом случае и плотность свободной энергии  $I$  показаны на рис.32. Подынтегральное выражение  $I$  равно нулю в нормальной области, в окрестности границы оно быстро, на масштабе  $\varkappa^{-1}$  достигает значения  $-1/2$  из-за второго члена в 154 за счет роста параметра порядка до 1 и затем плавно, с масштабом 1, за счет убывания магнитного поля, спадает в глубь сверхпроводящей области. Вычисление интеграла 154 дает отрицательное значение.

$$\sigma = \int I dx \approx -\frac{1}{2} \int_0^\infty [1 - (e^{-x} - 1)^2] dx = -\frac{3}{4}. \quad (155)$$

В противоположном предельном случае  $\varkappa \ll 1$  соотношение масштабов  $\psi$  и  $B$  обратное. Теперь параметр порядка, имеющий масштаб  $\varkappa^{-1}$ , является плавной функцией, а магнитное поле - резкой. Нетрудно также видеть, что экранирование магнитного поля осуществляется в области малых  $\psi \leq \varkappa$ , поскольку скорость спада магнитного поля  $\sim \psi$ , что видно из приближенного ВКБ решения уравнения для магнитного поля

$$A \sim e^{-\int^x \psi dx},$$

и, даже если бы  $\psi$  было бы постоянной равной  $\varkappa$ , то оно бы успело заэкранироваться на характерной длине изменения параметра порядка  $\varkappa^{-1}$ .

Качественный вид распределений магнитного поля и параметра порядка и зависимости плотности свободной энергии для малого  $\varkappa$  показаны на рис.33

Подынтегральное выражение  $I$  равно нулю в нормальной области, как только магнитное поле спадет, оно быстро, на масштабе 1 достигнет значения  $1/2$  из-за первого члена в 154 за счет убывания  $B$  до 0 и затем плавно, с масштабом  $\varkappa^{-1}$ , за счет возрастания параметра порядка, спадает в глубь сверхпроводящей области. Вычисление интеграла 154 в этом случае дает положительное значение

$$\sigma = \int I dx \approx \frac{1}{4\varkappa}. \quad (156)$$

Мы приближенно сосчитали площадь фигуры, показанной на правом графике Рис.33 как площадь треугольника, и пренебрегли малыми членами  $\sim 1$ . Таким образом мы нашли асимптотики зависимости  $\sigma(\varkappa)$  при больших и малых  $\varkappa$ ,

$$\sigma = \begin{cases} -3/4 + O(\varkappa^{-1}) & \varkappa \gg 1 \\ 1/(4\varkappa) + O(1) & \varkappa \ll 1 \end{cases} \quad (157)$$

Качественный график зависимости  $\sigma(\varkappa)$  приведен на Рис.34. Поскольку коэффициент поверхност-

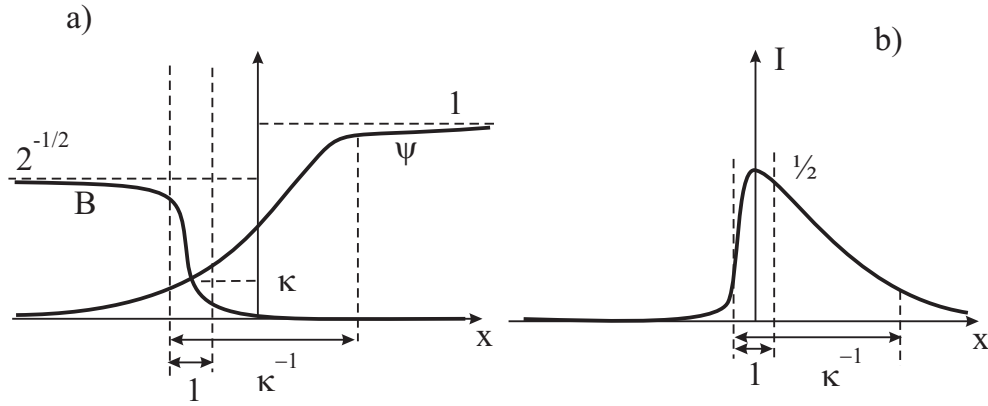


Рис. 33: Зависимость магнитного поля и параметра порядка -а) и плотности свободной энергии - б) от координаты в окрестности равновесной NS границы для малого  $\varkappa = \lambda/\xi \ll 1$

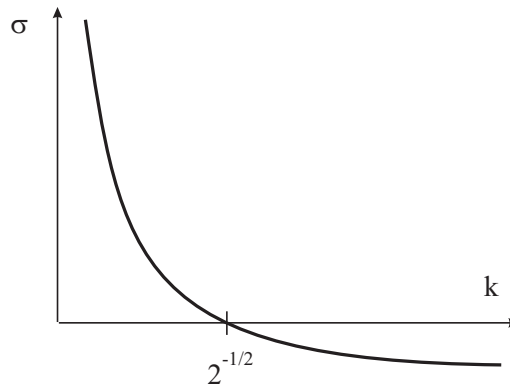


Рис. 34: Зависимость коэффициента поверхностного натяжения NS границы от параметра Гинзбурга-Ландау

ного натяжения при больших и малых  $\varkappa$  имеет разные знаки и представляет собой непрерывную функцию, то где при конечном  $\varkappa$  он должен обратиться в ноль, по крайней мере один раз. Мы сейчас покажем, что  $\sigma = 0$  при единственном значении  $\varkappa = 1/\sqrt{2}$ .

Потребуем, чтобы подынтегральное выражение  $I$  в формуле для поверхностного натяжения 154 обратилось в ноль при всех  $x$ . Это возможно при выполнении одного из условий

$$B - \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\psi^2}{\sqrt{2}},$$

из которых физически удовлетворительным является условие с отрицательным знаком, поскольку  $\psi$  растет с ростом  $x$ , а  $B = A_x$  - убывает. Итак, мы имеем

$$A_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \psi^2). \quad (158)$$

Далее, мы должны проверить, при каких  $\varkappa$  это условие совместно с уравнениями Гинзбурга-Ландау 146. Исключив с помощью 158  $\psi$  из уравнения для векторного потенциала 146 найдем для него замкнутое уравнение

$$A_{xx} = A(1 - \sqrt{2}A_x).$$

Необходимо еще потребовать, чтобы удовлетворялось еще не использованное уравнение для параметра порядка 146. Проще всего это сделать использовав первый интеграл системы уравнений 146.



Домножая уравнение для  $\psi$  на  $2\psi_x$ , а уравнение для магнитного поля - на  $2A_x$  и складывая их, получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \varkappa^{-2} \psi_x^2 + \psi^2(1 - A^2) + A_x^2 - \frac{\psi^4}{2} \right] = 0,$$

интегрируя которое и выбирая постоянную интегрирования из граничных условий, получим иско-  
мый первый интеграл

$$\varkappa^{-2} \psi_x^2 + \psi^2(1 - A^2) + A_x^2 - \frac{\psi^4}{2} = \frac{1}{2}.$$

Процедура проверки - следующая. Исключим с помощью 158 вторую производную  $A_{xx}$  из 146 и получим соотношение

$$\psi_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} A \psi,$$

которое, вместе с соотношением 158 подставим в выражение для первого интеграла. Мы получим равенство

$$\left( \frac{1}{2\varkappa^2} - 1 \right) A^2 \psi^2 = 0,$$

которое может быть справедливым, только при

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Глядя на выражение для свободной энергии 150 нетрудно понять, что граница раздела N и S фаз при  $H = H_c$  будет устойчивой только при  $\sigma > 0$ . В этом случае увеличение площади границы будет сопровождаться увеличением свободной энергии, и следовательно, система будет релаксировать в состояние с минимальной поверхностью раздела фаз. Такие сверхпроводники с  $\sigma > 0$  и  $\varkappa < 1/\sqrt{2}$  называются сверхпроводниками первого рода и именно к ним применимо рассмотрение фазового перехода, проведенное в разделе 4. Сверхпроводники же с  $\sigma < 0$  и  $\varkappa > 1/\sqrt{2}$  обладают неустойчивой фазовой границей, их свободная энергия не ограничена снизу при  $H = H_c$  и, следовательно, наше предположение о наличии однородных N и S состояний, разделенных плоской границей не верно. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками второго рода, при  $H = H_c$  они будут находиться в неоднородном, в так называемом, смешанном состоянии, изучением которого мы займемся в следующих разделах.

## 8 Сверхпроводники второго рода

### 8.1 Верхнее критическое поле

Как мы показали в предыдущем разделе, сверхпроводники с  $\kappa > 2^{-1/2}$ , называемые сверхпроводниками второго рода, обладают отрицательным поверхностным натяжением  $N-S$  границы при термодинамическом критическом поле  $H_c$ , и, следовательно, существует какое-то поле  $H_{c1} < H_c$  при превышении которого мейсснеровское однородное сверхпроводящее состояние сменяется каким-то неоднородным, так что в окрестности  $H_c$  будет иметь место это неоднородное состояние, характеризующееся пространственными вариациями магнитного поля и параметра порядка. При дальнейшем повышении магнитного поля это состояние будет как-то меняться и исчезнет, т.е. параметр порядка обратится в нуль, при некотором другом поле  $H_{c2}$ . Критические поля  $H_{c1}$ ,  $H_{c2}$  называются нижним и верхним критическими полями, а состояние сверхпроводника при  $H_{c1} < H < H_{c2}$  — промежуточным. Фазовая диаграмма такого сверхпроводника второго рода показана на Рис.35. Попробуем найти эти критические поля и выяснить структуру промежуточного состояния.

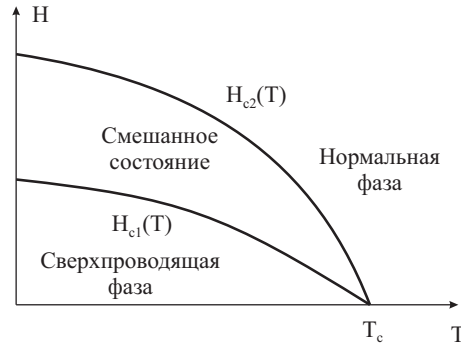


Рис. 35: Фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода

Начнем с исследования окрестности  $H_{c2}$ . Будем считать, что наш образец помещен в однородное магнитное поле с напряженностью  $H$ . Естественно предположить, что фазовый переход из нормального в промежуточное состояние будет происходить путем фазового перехода второго рода, так что в окрестности перехода параметр порядка будет мал  $|\psi| \ll 1$ . В уравнениях Гинзбурга-Ландау

$$(-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0, \quad (159)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\frac{i}{2\kappa}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - |\Psi|^2\mathbf{A}, \quad (160)$$

в приближении малого параметра порядка  $|\psi| \ll 1$  мы можем пренебречь нелинейными членами и написать

$$(-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi = 0, \quad (161)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = 0, \quad (162)$$

откуда следует, что в окрестности фазового перехода магнитное поле невозмущено и однородно  $B = H$ , а уравнение для параметра порядка приобретает вид уравнения Шредингера для заряженной частицы в магнитном поле, решенной в свое время Ландау. Выберем магнитное поле направленным вдоль оси  $\mathbf{z}$ , а векторный потенциал однородного магнитного поля выберем в следующем виде

$$\mathbf{A} = y_0 H x. \quad (163)$$

Теперь запишем уравнение для параметра порядка

$$\left[ \kappa^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (-i\kappa^{-1} \frac{\partial}{\partial y} - Bx)^2 + \kappa^{-2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 1 \right] \psi = 0, \quad (164)$$

Это уравнение не содержит явной зависимости от  $y$ ,  $z$  и следовательно, мы можем искать решение в виде

$$\psi = e^{ik_y y + ik_z z} \Phi(x)$$

и для  $\Phi$  получить

$$\left[ \varkappa^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\varkappa^{-1} k_y - Bx)^2 - \varkappa^{-2} k_z^2 + 1 \right] \psi = 0. \quad (165)$$

Это уравнение напоминает уравнение квантового гармонического осциллятора. Наша задача - найти множество значений  $H$ , при котором это уравнение имеет нетривиальное интегрируемое решение. Приведем его к каноническому виду, введя новую координату

$$\xi = \alpha(Bx - \varkappa^{-1} k_y),$$

где  $\alpha$  некоторый коэффициент. Выражая  $\frac{\partial}{\partial x}$  через  $\frac{\partial}{\partial \xi}$ , как  $\partial_x = \alpha H \partial_\xi$  получаем

$$\left[ \varkappa^{-2} \alpha^2 H^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \alpha^{-2} \xi^2 - \varkappa^{-2} k_z^2 + 1 \right] \psi = 0. \quad (166)$$

Разделив все члены на  $2\varkappa^{-1}H$  преобразуем это уравнение к виду

$$\left[ \frac{\varkappa^{-1} \alpha^2 H}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2\varkappa^{-1} \alpha^2 H} \xi^2 - \frac{\varkappa^{-2} k_z^2 + 1}{2\varkappa^{-1} H} \right] \psi = 0, \quad (167)$$

и выбрав  $\alpha = \sqrt{\varkappa/H}$  из соотношения  $\varkappa^{-1} \alpha^2 H = 1$  окончательно получим задачу на собственные значения

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} \xi^2 \right] \psi = E \psi, \quad E = \frac{1 - \varkappa^{-2} k_z^2}{2\varkappa^{-1} H}, \quad (168)$$

где собственное значение определено как

$$E = \frac{1 - \varkappa^{-2} k_z^2}{2\varkappa^{-1} H}.$$

Эта задача на собственные значения хорошо известна, выведенное уравнение называется уравнением Эрмита, к нему приводится также задача о квантовом гармоническом осцилляторе. Локализованное решение существует при

$$E = n + \frac{1}{2}, \quad (169)$$

а соответствующие собственные функции

$$\psi_n = e^{-\xi^2/2} H_n(\xi),$$

называются функциями Эрмита,  $H_n$  - полиномы Эрмита, причем  $H_0 = 1$ . Из условия квантования 169 найдем значения магнитного поля, при которых уравнение 167 имеет нетривиальные решения

$$H = \varkappa(2n + 1)(1 - \varkappa^{-2} k_z^2) \quad (170)$$

Для определения  $H_{c2}$  выберем максимально возможное из множества значений 170, чему соответствует выбор  $n = 0$  и  $k_z = 0$ . Мы получим, что в безразмерных переменных верхнее критическое поле равно

$$H_{c2} = \varkappa, \quad (171)$$

или в размерных переменных

$$H_{c2} = 1B \cdot \varkappa = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi^2}.$$

Этому значению магнитного поля соответствует множество собственных функций,

$$\psi_{k_y}(x, y) = e^{-\xi^2/2 + ik_y y} = \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\varkappa x - \varkappa^{-1}k_y)^2 + ik_y y \right\}, \quad (172)$$

не зависящих от  $z$  и различающихся значением  $k_y$ . Обратим внимание, что найденное значение  $H_{c2} = \varkappa$  превышает термодинамическое критическое поле  $H_c = 1/\sqrt{2}$  как раз при  $\varkappa > 1/\sqrt{2}$ , что совпадает с определением сверхпроводников второго рода, данного в предыдущем разделе. Можно сказать, что сверхпроводник второго рода, это такой сверхпроводник, у которого  $H_{c2} > H_c$ .

## 8.2 Смешанное состояние вблизи $H_{c2}$ . Задача Абрикосова.

Построим теперь решение нелинейных уравнений при магнитных полях близких к  $H_{c2}$ , или, более точно, при  $\varkappa - H \ll \varkappa$ . Эта задача была решена А. Абрикосовым в 1953 году и опубликована в 1957.

При поле в точности равному критическому  $H = \varkappa$  уравнениям Гинзбурга-Ландау удовлетворяет любая линейная комбинация решений 172 с различными  $k_y$ . Сделаем предположение, что решение может быть представлено в виде суммы решений 172 по дискретному  $k_{y,n} = nk$  и тем самым имеет вид

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \psi_{k_y=nk}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\varkappa x - \varkappa^{-1}nk)^2 + inky \right\}, \quad (173)$$

здесь  $k$  - некоторый параметр, определяющий масштаб решения,  $C_n$ - некоторые коэффициенты, которые пока будем считать произвольными. Магнитное поле и векторный потенциал при  $H = \varkappa$  определяются выражениями 163. Если внешнее магнитное поле будет немного ниже  $H_{c2}$  к магнитному полю и параметру порядка появятся малые поправки, которые будем искать методом последовательных приближений.

$$B_z = B = H + \delta B, \quad (174)$$

$$A_x = \delta A_x, \quad (175)$$

$$A_y = Hx + \delta A_y, \quad (176)$$

$$\psi = \Psi + \delta\psi. \quad (177)$$

Начнем с уравнения для векторного потенциала

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{i}{2\varkappa}(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - |\psi|^2 \mathbf{A}, \quad (178)$$

которое запишем в проекциях,

$$\frac{\partial B}{\partial y} = \frac{i}{2\varkappa}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x}) + |\psi|^2 A_x, \quad (179)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{i}{2\varkappa}(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y}) + |\psi|^2 A_y, \quad (180)$$

Удерживая в правой части члены нулевого порядка малости для поправок к векторному потенциалу получаем

$$\frac{\partial \delta B}{\partial y} = \frac{i}{2\varkappa}(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}), \quad (181)$$

$$-\frac{\partial \delta B}{\partial x} = \frac{i}{2\varkappa}(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial y}) + |\Psi|^2 Hx. \quad (182)$$

подставляя явный вид  $\Psi$  из 173 получаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta B}{\partial y} &= \frac{i}{2\kappa} \sum_{m,n} C_n C_m^* k(m-n) \exp[ik(n-m) - \frac{1}{2}(\kappa x - kn\kappa^{-1})^2 - \frac{1}{2}(\kappa x - km\kappa^{-1})^2], \\ -\frac{\partial \delta B}{\partial x} &= \frac{1}{2\kappa} \sum_{m,n} C_n C_m^* [k(m+n) + 2\kappa^2 x] \exp[ik(n-m) - \frac{1}{2}(\kappa x - kn\kappa^{-1})^2 - \frac{1}{2}(\kappa x - km\kappa^{-1})^2].\end{aligned}$$

откуда следует явное выражение для магнитного поля

$$B = H - \frac{|\Psi|^2}{2\kappa} = \kappa + (H - \kappa) - \frac{|\Psi|^2}{2\kappa}. \quad (183)$$

В последнем выражении последние два члена представляют собой малую поправку, пропорциональную отклонению поля от  $H_{c2}$ . Поскольку

$$B = B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y},$$

то выбирая калибровку  $A_x = 0$  для  $A = A_y$  из 183 получим

$$A = Hx - \int \frac{|\Psi|^2}{2\kappa} dx. \quad (184)$$

Перейдем теперь к изучению уравнения для параметра порядка. Будем искать решение уравнения в виде суммы невозмущенного решения и поправки

$$\psi = \Psi + \sum_n e^{ikny} \psi_n^{(1)} = \sum_n e^{ikny} (\psi_n(x) + \psi_n^{(1)}(x)), \text{ где } \psi_n = \exp[-\frac{1}{2}(\kappa x - \kappa^{-1}nk)^2], \quad (185)$$

и подставим это выражение в уравнение для параметра порядка 159

$$\begin{aligned}(kn\kappa^{-1} - \kappa x)^2 \psi_n^{(1)} - \kappa^{-2} \frac{\partial^2 \psi_n^{(1)}}{\partial x^2} - \psi_n^{(1)} &= 2x(\kappa - H)(\kappa x - \kappa^{-1}nk) C_n \psi_n + \sum_{m,p} C_p C_m^* C_{n-p+m} \\ &\left\{ \left[ x - \kappa^{-2}k(n - \frac{p-m}{2}) \right] \times \psi_{n-p+m}(x) \int^x \psi_p(x') \psi_m(x') dx' - \psi_{n-p+m}(x) \psi_p(x) \psi_m(x) \right\}. \quad (186)\end{aligned}$$

Для разрешимости этой неоднородной системы уравнений, по теореме Фредгольма необходимо, чтобы правая часть была ортогональна решению однородной задачи. Нетрудно видеть, что решение однородной задачи есть  $\psi_n$ . Домножая правую часть на  $\psi_n$  и интегрируя по  $x$  получим

$$2^{-1/2} [(2\kappa^2)^{-1} - 1] \sum_{p,m} C_p C_m^* C_{n-p+m} \exp \left\{ -\frac{k^2}{2\kappa^2} [(p-n)^2 + (p-m)^2] \right\} + C_n (\kappa - H) / \kappa = 0. \quad (187)$$

Умножим это уравнение на  $C_n^*$  и просуммируем по  $n$ . Ответ представляется в виде

$$\frac{\kappa - H}{\kappa} \overline{|\Psi|^2} + [(2\kappa^2)^{-1} - 1] \overline{|\Psi|^4} = 0, \quad (188)$$

где крышкой над буквой обозначено усреднение по пространству. Вычислим среднее поле  $\overline{B}$

$$\overline{B} = H - \frac{\overline{|\Psi|^2}}{2\kappa} = H - \frac{1}{2\kappa^2} \frac{\overline{|\Psi|^2}^2 \overline{|\Psi|^4}}{\overline{|\Psi|^4} \overline{|\Psi|^2}} = H - \frac{1}{\beta_A} \frac{\kappa - H}{2\kappa^2 - 1}, \quad (189)$$

где мы ввели параметр Абрикосова

$$\beta_A = \frac{\overline{|\Psi|^4}}{\overline{|\Psi|^2}^2},$$

полезный тем, что как следует из определения 173 для  $\Psi$ , это есть величина, не зависящая от  $H$  и уравнение 189 явно определяет зависимость  $B(H)$  и тем самым амплитуду параметра порядка в окрестности верхнего критического поля. Конечно, величина  $\beta_A$  должна быть известна. Точно также через величину  $\beta_A$  можно выразить и свободную энергию 108 (на единицу длины)

$$F = \int B^2 - \frac{|\psi|^4}{2} dx dy = \bar{B}^2 - \frac{(\varkappa - \bar{B})}{1 + \beta_A(2\varkappa^2 - 1)}, \quad (190)$$

которая является термодинамическим потенциалом относительно  $\bar{B}$ . Из этого выражения следует, что минимум свободной энергии достигается при минимальном  $\beta_A$ . Условие минимальности позволяет в принципе найти коэффициенты  $C_n$  и постоянную  $k$ . Этот вопрос не простой, но к настоящему времени выясненный. Я только приведу результаты самого Абрикосова и расскажу как они были получены.

В своей статье А. Абрикосов легкомысленно написал, что нет никаких оснований считать коэффициенты  $C_n$  разными и поэтому положил их все равными  $C_n = C$ , так что распределение параметра порядка оказалось следующим

$$\Psi^\square = C \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\varkappa x - \varkappa^{-1} n k)^2 + i n k y \right\}. \quad (191)$$

Вычисляя  $\beta_A$

$$\beta_A = \frac{k}{\varkappa \sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-k^2 n^2 / 2\varkappa^2) \right]^2,$$

он нашел что минимальное значение  $\beta_A$  достигается при  $k = \sqrt{2\pi}\varkappa$  и равно  $\beta_A^\square = 1.18$ . Функция 191 выражается через Тета функцию Якоби  $\theta_3$ , определяемую как

$$\theta_3(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-\pi x n^2 + 2\pi n y). \quad (192)$$

Сама функция 191 записывается как

$$\Psi^\square = C \exp(-\varkappa^2 x^2 / 2) \theta_3[1, (2\pi)^{1/2} i \varkappa (x + i y)]. \quad (193)$$

Модуль этой функции обладает симметрией квадратной решетки. В точках

$$x_m = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varkappa} \left(m + \frac{1}{2}\right), \quad y_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varkappa} \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

функция  $\psi$  обращается в ноль по линейному закону, как

$$\Psi \sim (x - x_m) + i(y - y_n) = z - z_{m,n}.$$

Из уравнений 181 следует, что магнитное поле  $B_z$  в двумерной задаче является функцией тока

$$\mathbf{j} = \text{rot}_{\mathbf{z}_0} B = -[\mathbf{z}_0 \times \nabla B],$$

а поскольку в силу 183 магнитное поле линейно связано с  $|\Psi|^2$  то линии уровня параметра порядка (и магнитного поля) одновременно и являются линиями тока. Отсюда следует, что ток циркулирует вокруг нулей параметра порядка, образуя квадратную решетку вихрей. Эти вихри в настоящее время называются вихрями Абрикосова. Квадратная вихревая решетка показана на Рис.36 Однако детальный анализ, выполненный позже, показал, что предположение Абрикосова о равенстве коэффициентов  $C_n$  было ошибочным, и квадратная вихревая решетка не доставляет абсолютного

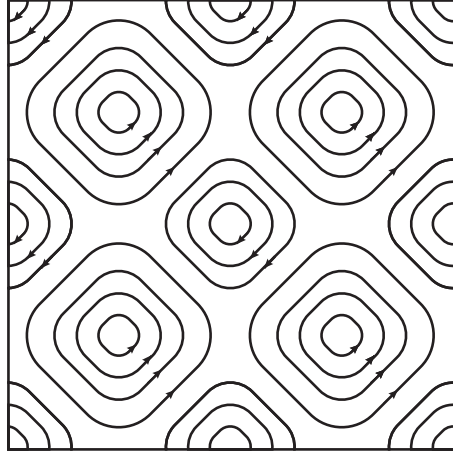


Рис. 36: Фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода

минимума свободной энергии  $190$  и функционалу Абрикосова  $\beta_A$ . А минимально возможное значение параметра Абрикосова есть

$$\beta_A^\Delta = 1.16,$$

и соответствует оно не квадратной, а треугольной решетке вихрей. Правильный выбор коэффициентов оказывается таким

$$C_n = \exp \left[ \frac{i\pi n(n-1)}{2} \right].$$

Однако, за исключение формы решетки, все остальные существенные свойства решения, сохраняются. Самым важным из них является наличие решетки точек, где параметр порядка ведет себя как

$$\psi \sim z = x + iy.$$

Если записать это комплексное число в тригонометрической форме

$$\psi \sim z = x + iy = e^{i\theta},$$

то, нетрудно видеть, что фаза решения меняется на  $2\pi$  при обходе вокруг нулей параметра порядка. Это значит, что  $\nabla\theta$  представляет векторное поле с завихренностью и решение, найденное Абрикосовым, представляет собой решетку вихрей. Эти вихри в настоящее время называются вихрями Абрикосова.

### 8.3 Структура одиночного вихря. Нижнее критическое поле.

Исходя из анализа, проведенного в предыдущем разделе, естественно предположить, что по мере уменьшения магнитного поля расстояние между соседними вихрями Абрикосова будет возрастать и при приближении к нижнему критическому полю вихри будут настолько редки, что их можно будет рассматривать как независимые. Попробуем найти решения уравнений Гинзбурга-Ландау, соответствующие одиночному вихрю. Запишем уравнения Гинзбурга-Ландау в действительной форме <sup>121,122</sup>

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = f^2 \mathbf{v}_s, \tag{194}$$

$$\kappa^{-2} \Delta f + (1 - f^2 - v_s^2) f = 0, \tag{195}$$

$$\mathbf{v}_s = \kappa^{-1} \nabla \theta - \mathbf{A}, \tag{196}$$

и попытаемся найти "цилиндрически симметричное" решение этих уравнений. Более точно выражаясь, введем цилиндрическую систему координат  $\rho, \varphi, z$  с осью вдоль магнитного поля и будем искать не зависящее от  $z$  решение в виде

$$\mathbf{A} = \varphi_0 A(\rho), \quad \mathbf{v}_s = \varphi_0 v(\rho), \quad \mathbf{B} = z_0 B(\rho), \quad f = f(\rho), \quad \theta = m\varphi, \quad (197)$$

где  $m$  - произвольное целое число, выражающее число оборотов фазы параметра порядка при обходе вокруг вихря. Градиент фазы параметра порядка  $\nabla\theta$  обладает необычным свойством, его циркуляция по бесконечно малому контуру, охватывающему центр вихря

$$\oint \nabla\theta d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial\theta}{\partial\varphi} \rho d\varphi = 2\pi m.$$

С другой стороны, применяя формально теорему Стокса к этому интегралу

$$\oint \nabla\theta d\mathbf{l} = \int \text{rot}\nabla\theta d\mathbf{S},$$

получаем

$$\text{rot}\nabla\theta = 2\pi m \delta(\boldsymbol{\rho}), \quad (198)$$

здесь  $\boldsymbol{\rho}$  двумерный вектор в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{z}$ .

Используя выражение для фазы напомним связь между сверхскоростью и векторным потенциалом

$$v = \frac{m}{\kappa\rho} - A,$$

и запишем уравнения 194 в виде

$$\kappa^{-2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho \frac{\partial f}{\partial\rho} + (1 - v^2 - f^2)f = 0, \quad (199)$$

$$-\frac{\partial B}{\partial\rho} = v f^2, \quad (200)$$

$$B = (\text{rot}\mathbf{A})_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho v + \frac{2\pi m}{\kappa} \delta(\boldsymbol{\rho}). \quad (201)$$

Граничные условия для этой системы - это отсутствие особенности у магнитного поля и параметра порядка при  $\rho \rightarrow 0$  и выход на однородные значения  $B \rightarrow 0, f \rightarrow 1$  при  $\rho$ . Обсудим сначала асимптотическое поведение решения при малых  $\rho$ . Поскольку магнитное поле конечно при малых  $\rho$  его векторный потенциал  $A_\varphi = A \sim \rho$  и основной вклад в сверхскорость вносит  $\nabla\theta$ , поэтому

$$v = \frac{m}{\kappa\rho} \quad \text{при} \quad \kappa\rho \ll 1.$$

Уравнение для параметра порядка, справедливое вблизи оси вихря

$$\kappa \left[ \rho^{-1} \frac{\partial}{\partial\rho} \rho \frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} f \right] + f - f^3 = 0,$$

как нетрудно проверить, имеет асимптотическое решение

$$f = C \kappa \rho^m,$$

где коэффициент  $C$  должен быть определен путем удовлетворения граничных условий на  $\infty$ . Заметим, что асимптотика комплексного параметра порядка  $\psi = f e^{i\theta}$  может быть записана в виде

$$\psi = f e^{i\theta} \sim \rho^m e^{im\varphi} = (\rho e^{i\theta})^m = (x + iy)^m = z^m,$$



явно подчеркивающим аналитичность параметра порядка при  $|z| \rightarrow 0$  Уравнение для магнитного поля  $B$  в окрестности оси вихря

$$\frac{\partial B}{\partial \rho} \sim -C^2 \kappa^2 \rho^{2m} \frac{m}{\kappa \rho}$$

имеет решение

$$B = B_0 - \frac{C^2 \kappa}{2} \rho^{2m},$$

зависящее еще от одной постоянной  $B_0$ . Как и  $C$  она должна быть определена путем удовлетворения условий при  $\rho \gg 1$  Используя асимптотические разложения для магнитного поля и параметра порядка как начальные условия, мы можем численно решить уравнения Гинзбурга-Ландау 194 и подобрать постоянные  $B_0, C$ , чтобы удовлетворялись условия на бесконечности. Параметр  $m$  до сих пор оставался произвольным, он должен быть определен из условия минимальности свободных энергий на решениях с различными  $m$ . Как мы увидим, минимальной энергией обладает вихрь с  $m = 1$ , называемый одноквантовым.

Покажем, что поток магнитного поля в вихре квантован и пропорционален числу накруток фазы  $m$ . Для этого запишем выражение для сверхскорости 194

$$\mathbf{v}_s = \kappa^{-1} \nabla \theta - \mathbf{A},$$

и проинтегрируем его по удаленной окружности, проходящей в области применимости асимптотик решения на  $\infty$ , в которой, как мы покажем,  $\rho v \rightarrow 0$ . Мы получим

$$\Phi = \oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint \nabla \theta d\mathbf{l} = 2\pi m / \kappa,$$

чему в размерных переменных соответствует  $m$  квантов потока  $\Phi_0$ .

Качественный вид распределения параметра порядка и магнитного поля показан на Рис.37

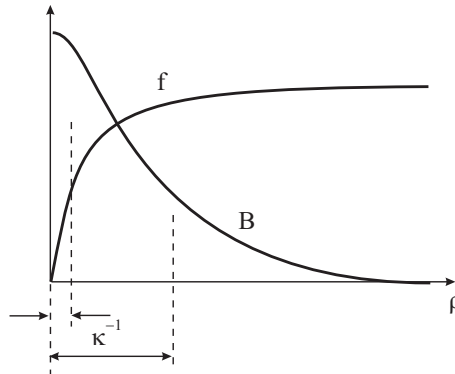


Рис. 37: Распределение параметра порядка и магнитного поля в вихре

Для получения оценки нижнего критического поля проанализируем более подробно структуру вихрей в сверхпроводниках с  $\kappa \gg 1$ . В этом случае характерные масштабы параметра порядка  $L_f \sim \kappa^{-1}$  и магнитного поля  $L_B \sim 1$  сильно различаются и решение уравнений 194 может быть получено следующим способом. Поделим обе части уравнения 194 на  $f^2$ , возьмем двумерный rot от обеих частей и воспользуемся свойством 198. В результате мы придем к уравнению

$$\text{rot} \frac{1}{f^2} \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} = \frac{2\pi m}{\kappa} \mathbf{z}_0 \delta(\rho). \quad (202)$$

Если мы не будем интересоваться областью  $\rho \lesssim \kappa^{-1}$ , считая, что эта область вносит малый вклад в свободную энергию, то для  $\kappa \rho \gg 1$  мы можем считать, что  $f$  уже вышла на свое асимптотическое

значение  $f = 1$  и из уравнения 202 получить уравнение Лондонов для распределения магнитного поля в вихре  $\mathbf{B} = \mathbf{z}_0 B$

$$-\Delta B + B = \frac{2\pi m}{\varkappa} \delta(\boldsymbol{\rho}). \quad (203)$$

Это уравнение линейное и оно может быть легко решено. Записывая его в цилиндрической системе координат, получим модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial B}{\partial \rho} + B = 0,$$

решение которого должно удовлетворять асимптотическому условию  $\partial_\rho B \rightarrow m/(\varkappa \rho)$ . Это асимптотическое решение находится следующим образом. При малых  $\rho$  пренебрежем членом с  $B$  в 203, а лапласиан представим в виде  $\Delta = \text{div} \nabla$  в результате придем к уравнению Лапласа

$$-\text{div} \nabla B = \frac{2\pi m}{\varkappa} \delta(\boldsymbol{\rho}).$$

Применив двумерную теорему Гаусса

$$\int \text{div} \mathbf{q} dV = \int \mathbf{q} d\mathbf{S}$$

к обеим частям этого уравнения, получим нужную асимптотику

$$-\frac{\partial B}{\partial \rho} = m/(\varkappa \rho).$$

Эта задача эквивалентна нахождению электрического поля заряженной нити. Магнитное поле  $B$  играет роль потенциала электрического поля. Асимптотическое поведение магнитного поля  $B$  получается интегрированием полученного соотношения

$$B = \frac{m}{\varkappa} \ln \frac{1}{\rho}. \quad (204)$$

Полное решение уравнения 203, удовлетворяющее ему также и на больших расстояниях  $\rho \gg 1$ -функция Макдональда

$$B = m \varkappa^{-1} K_0(\rho), \quad (205)$$

связанная с функцией Ханкеля мнимого аргумента

$$K_0(\rho) = H_0^+(i\rho).$$

Выражение для сверхтока получается из уравнения для магнитного поля 199

$$v = \frac{\partial B}{\partial \rho} = \frac{m}{\varkappa} K_1(\rho). \quad (206)$$

Приведем асимптотики нулевой и первой функций Макдональда при больших и малых значениях аргумента

$$K_0(\rho) = \begin{cases} \ln \frac{1}{\rho} & \rho \ll 1 \\ (\pi\rho)^{-1/2} e^{-\rho} & \rho \gg 1 \end{cases}; K_1(\rho) = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} & \rho \ll 1 \\ (\pi\rho)^{-1/2} e^{-\rho} & \rho \gg 1 \end{cases}. \quad (207)$$

Теперь вычислим энергию вихря на единицу длины  $\epsilon$ , которую определим как

$$\epsilon = L^{-1}[F(\text{с вихрем}) - F(\text{без вихря})].$$

В безразмерных переменных эта величина равна (сравни с 145)

$$\epsilon = \int \varkappa^{-2} (\nabla f)^2 + f^2 v_s^2 - f^2 + \frac{f^4 - 1}{2} + (\text{rot} \mathbf{A})^2 2\pi \rho d\rho. \quad (208)$$

В используемом Лондоновском приближении, мы пренебрегаем вкладом области  $\rho \lesssim \varkappa^{-1}$ , где модуль параметра меняется. Вне этой области  $f \approx 1$ ,  $\nabla f \approx 0$  и свободная энергия 208 переписывается в виде

$$\epsilon \approx 2\pi \int_{\varkappa^{-1}}^{\infty} (v^2 + B^2) \rho d\rho 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_{\varkappa^{-1}}^{\infty} (K_1^2(\rho) + K_0^2(\rho)) \rho d\rho. \quad (209)$$

Свободная энергия вихря в этом приближении складывается из кинетической энергии сверхпроводящих электронов и магнитной энергии. Как следует из асимптотических разложений для функций Макдональда основной вклад в интеграл, логарифмически расходящийся на нижнем пределе при  $\varkappa^{-1} \rightarrow 0$  вносит член  $K_1^2$ . Поэтому, если мы хотим получить только главный член, мы можем пренебречь магнитной энергией и учесть только кинетическую, кроме того можно воспользоваться асимптотикой  $K_1$  для малых  $\rho$  а верхний предел заменить единицей. Для энергии  $m$ -квантового вихря мы получим формулу

$$\epsilon_m \approx 2\pi \int_{\varkappa^{-1}}^{\infty} (K_1^2(\rho) + K_0^2(\rho)) \rho d\rho \approx 2\pi \int_{\varkappa^{-1}}^{\infty} K_1^2(\rho) \rho d\rho \approx 2\pi \int_{\varkappa^{-1}}^{\infty} \frac{m^2}{\varkappa^2 \rho^2} \rho d\rho \approx (2\pi m^2 / \varkappa^2) \ln \varkappa, \quad (210)$$

которую можно представить в виде

$$\epsilon_m = m^2 \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon \approx (2\pi \varkappa^2) \ln \varkappa, \quad (211)$$

есть энергия одноквантового вихря. Из этой формулы легко понять, что  $m$ -квантовый вихрь будет неустойчив по отношению к распаду на  $m$  отдельных одноквантовых вихрей. Действительно, свободная энергия  $m$  одноквантовых вихрей  $m\varepsilon$ , меньше энергии одного  $m$ -квантового вихря  $m^2\varepsilon$  и в сверхпроводнике будут существовать только одноквантовые вихри, которые и будем дальше рассматривать.

В размерных переменных выражение для энергии на единицу длины вихря приобретает вид

$$\varepsilon = \frac{1B^2\lambda^2}{8\pi} \varepsilon_{dl} = \frac{\Phi_0^2\lambda^2}{(2\pi)^2\lambda^2\xi^2(8\pi)} \frac{2\pi\xi^2}{\lambda^2} = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2, \quad (212)$$

Теперь, зная свободную энергию вихря мы можем найти нижнее критическое поле. Для этого запишем свободную энергию  $\tilde{F}$  сверхпроводника с вихрем

$$\tilde{F} = F - \int \frac{BH}{4\pi} dV = F(\text{без вихря}) + L \left( \varepsilon - H \int \frac{B}{4\pi} \right) dS, \quad (213)$$

вспоминая, что поток в вихре квантован и равен  $\int B dS = \Phi_0$  получаем

$$\tilde{F} = F(\text{без вихря}) + L \left( \varepsilon - \frac{\Phi_0 H}{4\pi} \right), \quad (214)$$

Проникновение вихря становится термодинамически выгодным при

$$\varepsilon - \frac{\Phi_0 H}{4\pi} < 0$$

откуда сразу находим выражение для нижнего критического поля

$$H_{c1} = \frac{4\pi\varepsilon}{\Phi_0} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln \frac{\lambda}{\xi} \quad (215)$$

При больших параметрах Гинзбурга-Ландау  $\varkappa$  нижнее критическое поле  $H_{c1}$  оказывается много меньше, чем термодинамическое критическое поле  $H_c$  и фазовая диаграмма сверхпроводника второго рода, имеет вид, изображенный на Рис. 35.

## 9 Эффект Джозефсона

### 9.1 Вывод формулы для джозефсоновского тока

Рассмотрим ситуацию, когда два куска сверхпроводника располагаются близко друг от друга, так, что становится возможным туннелирование электронов из одного куска в другой. Эффекты, возникающие в этой ситуации, впервые были рассмотрены теоретически Брайаном Джозефсоном в работе 1962 года и впоследствии эти эффекты были обнаружены экспериментально Гиавером (Giaver). В 1975 Джозефсон, Гиавер и Эсаки получили Нобелевскую премию за исследования туннельных эффектов в сверхпроводниках и полупроводниках.

Рассмотрим два куска сверхпроводника, расположенных при  $x > 0$  и при  $x < 0$  и разделенных узким туннельным барьером, расположенным в окрестности  $x = 0 \pm \varepsilon$ , как показано на Рис.38 Для того, чтобы вероятность туннелирования была заметной, необходимо, чтобы толщина барьера

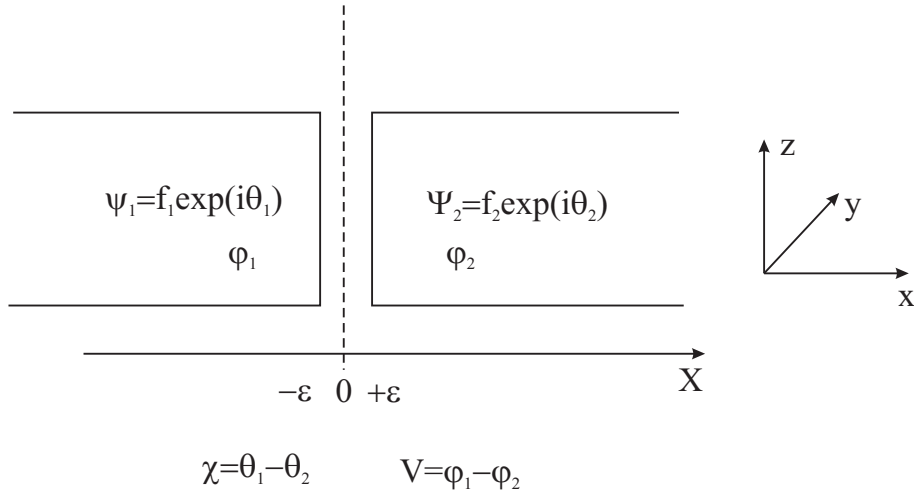


Рис. 38: Геометрия джозефсоновского контакта

$\varepsilon$  была порядка нескольких атомных длин  $a$ , поэтому, с точки зрения теории Гинзбурга-Ландау, справедливой для плавных распределений параметра порядка  $\xi \gg a$  ширину барьера можно считать бесконечно малой. Будем считать, что параметр порядка в различных кусках есть  $\psi_{1,2}$  если бы сверхпроводящие куски были бы изолированы, свободная энергия всей системы складывалась бы из свободных энергий независимых кусков

$$F[\psi_1, \psi_2] = F_1[\psi_1] + F[\psi_2],$$

где каждое из выражений дается формулой 266 для свободной энергии теории Гинзбурга-Ландау. Учет взаимодействия осуществляется путем добавления к этому выражению члена с взаимодействием  $F_{int}$ , так что полная свободная энергия приобретает вид

$$F[\psi_1, \psi_2] = F_1[\psi_1] + F[\psi_2] + F_{int}[\psi_1, \psi_2]$$

Свободные энергии  $F_{1,2}$  даются обычными выражениями Гинзбурга-Ландау 99 где интегрирование осуществляется по объемам соответствующих сверхпроводников. Свободная энергия взаимодействия будет являться функционалом от значений  $\psi_1(x = 0 - \varepsilon) = \psi_1 = f_1 e^{i\theta_1}$  и  $\psi_2(x = 0 + \varepsilon) = \psi_2 = f_2 e^{i\theta_2}$  на поверхности соседствующих сверхпроводников. Эту энергию, ответственную за эффект Джозефсона, в дальнейшем будем называть джозефсоновской энергией и обозначать как  $F_J$ .

Для её нахождения воспользуемся общими идеями феноменологической теории фазовых переходов, использованных в разделе 6 при конструировании объемной плотности свободной энергии.

В соответствии с этими идеями параметр порядка считается малым и используется разложение по нему. Рассмотрим сначала случай нулевого магнитного поля. Считая, что взаимодействие сверхпроводников мало, мы сразу можем написать действительные билинейные формы для однородных по поверхности  $\psi$

$$F_J = S(g\psi_1\psi_2^* + g^*\psi_1^*\psi_2) = 2S|g|f_1f_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \alpha) \quad (216)$$

и для неоднородных сверхпроводников

$$F_J = \int (g\psi_1(\mathbf{r}_\perp)\psi_2^*(\mathbf{r}_\perp) + g^*\psi_1^*(\mathbf{r}_\perp)\psi_2(\mathbf{r}_\perp))d^2r_\perp = 2 \int |g|f_1f_2 \cos(\theta_1 - \theta_2 + \alpha)d^2r_\perp, \quad (217)$$

выражающие свободную энергию взаимодействия сверхпроводников. Здесь  $g = |g|e^{i\alpha}$  - коэффициент связи. Она представляет собой первый не исчезающий член разложения, возможные члены высших степеней  $\psi$  и члены с градиентами вдоль поверхности раздела  $\nabla_\perp$  представляют величины следующего порядка малости. Постоянную  $c$ , определяемую вероятностью туннелирования можно считать не зависящей от температуры. Теперь, действуя аналогично 6 нам необходимо обобщить выражения 216 или 217 на случай конечного магнитного поля, пользуясь требованием калибровочной инвариантности свободной энергии. Итак, выражения для свободной энергии должны остаться инвариантными при преобразовании 96. Для этого необходимо заменить калибровочно неинвариантную разность фаз  $\theta_1 - \theta_2 = \theta(\mathbf{r}_1) - \theta(\mathbf{r}_2)$  выражением

$$\theta_1 - \theta_2 \rightarrow \theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 \mathbf{A} d\mathbf{l},$$

получающегося путем интегрирования от точки 2 до точки 1 калибровочно инвариантного выражения 110

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \left( \nabla\theta - \frac{2e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) d\mathbf{l} = \theta(2) - \theta(1) - \frac{2e}{\hbar c} \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

Таким образом для свободной энергии взаимодействия окончательно получаем

$$F_J = 2S|g|f_1f_2 \cos \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx - \alpha \right) = \quad (218)$$

$$S \left( g\psi_1\psi_2^* \exp \left[ \frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx \right] + g^*\psi_1^*\psi_2 \exp \left[ -\frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx \right] \right). \quad (219)$$

Это выражение может быть несколько упрощено, если мы предположим что контакт между сверхпроводниками не обладает магнитной структурой и система обладает симметрией относительно обращения времени. В этом случае выражение для свободной энергии должно быть симметрично относительно замены  $1 \rightleftharpoons 2$ , откуда следует действительность коэффициента связи  $g$  и равенство нулю его фазы  $\alpha$ . В дальнейшем мы будем рассматривать только такой случай и использовать следующее выражение для поверхностной свободной энергии

$$F_J = 2|g| \int d^2r_\perp f_1f_2 \cos \left( \theta_2 - \theta_1 - \frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx \right) = \quad (220)$$

$$\int d^2r_\perp g \left( \psi_1\psi_2^* \exp \left[ \frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx \right] + \psi_1^*\psi_2 \exp \left[ -\frac{2e}{\hbar c} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} A_x dx \right] \right). \quad (221)$$

Теперь, используя это выражение для поверхностной свободной энергии, получим выражение для электрического тока через поверхность раздела двух сверхпроводников. Для этого вспомним, что электрический ток определяется выражением 104

$$\mathbf{j} = -c \frac{\delta F_{\text{matter}}}{\delta \mathbf{A}}. \quad (222)$$

Используя в качестве  $F_{\text{matter}}$  выражение для джозефсоновской энергии  $F_J$  220 получим для вариации

$$\delta F_J = \frac{4e}{\hbar c} g \int f_1 f_2 \sin \left[ \theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x \right] \delta A_x dx d^2 r_{\perp} \quad (223)$$

откуда для плотности тока через границу получаем

$$j_x = j_{1 \rightarrow 2} = j_c \sin \chi, \quad (224)$$

где

$$j_c = \frac{4e}{\hbar} |g| f_1 f_2 \quad (225)$$

-критическая плотность тока, а

$$\chi = \theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx, \quad (226)$$

так называемая джозефсоновская разность фаз. Таким образом мы получили, что через туннельный контакт между двумя сверхпроводниками может течь сверхпроводящий ток, определяемый разностью фаз параметров порядка по разные стороны перехода. Наличие такого тока было предсказано Джозефсоном и в честь него называется эффектом Джозефсона. Как видно из выражения 224 джозефсоновский ток не может превышать критического тока, определяемого 225, поскольку  $|\sin \chi| < 1$

## 9.2 Нестационарный эффект Джозефсона

Зададим себе вопрос: а что будет, если ток через джозефсоновский контакт превысит критическое значение? Совершенно очевидно, что на переходе Джозефсона при этом появится напряжение и кроме сверхпроводящего появится нормальный ток. Попробуем вывести уравнения, описывающие динамику Джозефсоновского перехода. Рассмотрим случай нулевого внешнего магнитного поля и заметим, что при  $j < j_c$  выражение для тока 224

$$I = I_c \sin \chi, \quad \text{где } \chi = \theta_1 - \theta_2,$$

должно быть дополнено уравнением, выражающим стационарность фазы  $\chi$

$$\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = \hbar \frac{\partial \theta_1 - \theta_2}{\partial t} = 0, \quad \text{или } \hbar \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \hbar \frac{\partial \theta_2}{\partial t}. \quad (227)$$

Однако, это уравнение не инвариантно относительно калибровочного преобразования. Как мы знаем, см. 97 для восстановления калибровочной инвариантности мы должны заменить временные производные на удлиненные

$$\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi \rightarrow \left( \hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\varphi \right) \psi, \quad (228)$$

$$\hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} \rightarrow \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} + 2e\varphi, \quad (229)$$

где  $\varphi$ - скалярный потенциал электромагнитного поля. Прodelывая эту процедуру с условием стационарности фазы 227 мы придем к так называемому джозефсоновскому соотношению

$$\hbar \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + 2e\varphi_1 = \hbar \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + 2e\varphi_2. \quad (230)$$

Это соотношение может быть переписано в виде, связывающим скорость изменения фазы и напряжение на переходе

$$\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} + 2eV = 0, \quad (231)$$

где  $V = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение на контакте. Очень часто джозефсоновское соотношение записывают в виде

$$\hbar \frac{\partial \chi}{\partial t} = 2|e|V. \quad (232)$$

Теперь мы можем записать уравнение для полного тока через джозефсоновский переход, справедливое как при  $I < I_c$ , так и при  $I > I_c$ . Ток через джозефсоновский переход складывается из сверхпроводящего тока  $I_s = I_c \sin \chi$  и тока нормальных электронов, который будем считать равным  $I_N = V/R$ . Для полного тока имеем

$$I_N + I_s = \frac{V}{R} + I_c \sin \chi = I.$$

Выражая напряжение на переходе через  $\dot{\chi}$  с помощью джозефсоновского соотношения 232 получаем уравнение, описывающее динамику джозефсоновской фазы

$$\frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial \chi}{\partial t} + I_c \sin \chi = I. \quad (233)$$

Уравнение первого порядка 233, описывающее джозефсоновский переход с малой емкостью может быть легко решено. Но сначала запишем его в безразмерных переменных. Вводя безразмерный ток  $z = I/I_c$  и безразмерное время  $\tau = \Omega t$ , где

$$\hbar \Omega = 2|e|RI_c, \quad (234)$$

запишем 233 как

$$\dot{\chi} + \sin \chi = z.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, что очевидно если мы перепишем его в виде

$$\frac{d\chi}{z - \sin \chi} = dt. \quad (235)$$

Вычисляя интеграл по времени от обеих частей этого уравнения (интеграл в левой части берется с помощью введения переменной  $u = \text{tg}(\chi/2)$ ) получаем решение для  $\chi$

$$\chi = 2 \arctg \left\{ \sqrt{1 - z^{-2}} \text{tg} \frac{\tau \sqrt{z^2 - 1}}{2} + \frac{1}{z} \right\}. \quad (236)$$

Дифференцируя это решение по времени получим мгновенное безразмерное напряжение  $\dot{\chi} = v = V/RI_c$ , выражение для которого при токе, превышающем критический  $z > 1$  имеет вид

$$v(t) = \dot{\chi} = \frac{z(z^2 - 1)}{z^2 + \cos \varphi + \sqrt{z^2 - 1} \sin \varphi},$$

где мы ввели переменную  $\varphi = \tau \sqrt{z^2 - 1}$ . Усреднение формулы для напряжения по периоду дает вольт-амперную характеристику контакта

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z^2 - 1}{z + \cos \tau} d\tau = \sqrt{z^2 - 1},$$

график которой приведен на Рис.39

При выводе уравнения 233 мы пренебрегли током смещения или током заряда конденсатора, образованного сверхпроводящими электродами. Он может быть учтен простым добавлением емкостного тока

$$I_{cap} = C \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}$$

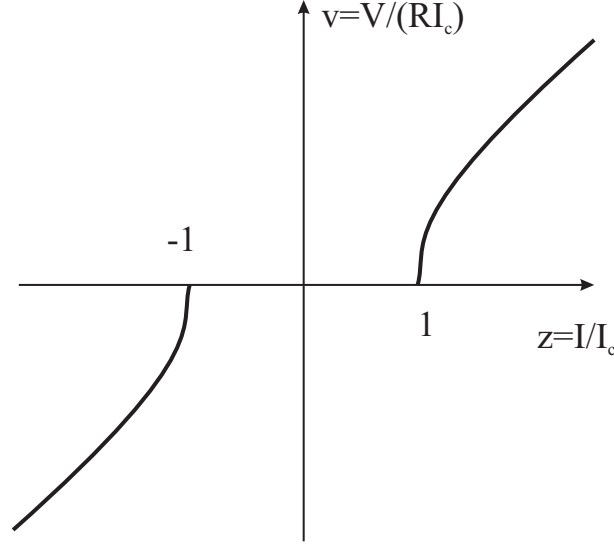


Рис. 39: Вольт-амперная характеристика джозефсоновского контакта с малой емкостью

к левой части уравнения 233. В результате получим

$$\frac{\hbar C}{2|e|} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial \chi}{\partial t} + I_c \sin \chi = I. \quad (237)$$

Переходя к безразмерным переменным, использованным при получении 235 мы получим

$$\beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \chi}{\partial \tau} + \sin \chi = z, \quad (238)$$

где  $\beta$  - безразмерный параметр, так называемый параметр Мак-Камбера, определенный как

$$\beta = RC\Omega. \quad (239)$$

Из такой записи уравнения нетрудно видеть, что пренебрежение емкостным током в резистивном состоянии справедливо при  $\beta \ll 1$

### 9.3 Влияние магнитного поля на критический ток контакта

Предположим теперь, что на джозефсоновский переход наложено однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$  вдоль оси  $y$ , как показано на Рис.40. Если мы пренебрежем возмущениями магнитного поля, создаваемыми токами через джозефсоновский переход, что возможно при малой его площади, то результирующее магнитное поле  $B_y(x)$  будет однородно в пространстве между сверхпроводниками и спадать вглубь сверхпроводников по экспоненциальному закону  $e^{-x/\lambda}$ , с характерной лондоновской длиной  $\lambda$ . Зависимость магнитного поля от координаты  $x$  показана на Рис.40. Векторный потенциал такого магнитного поля может быть выбран в виде

$$A_x = B_y(x)z.$$

Теперь вычислим ток через контакт, пользуясь формулами 224,226.

$$j_x = j_c \sin \left( \theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx \right), \quad (240)$$



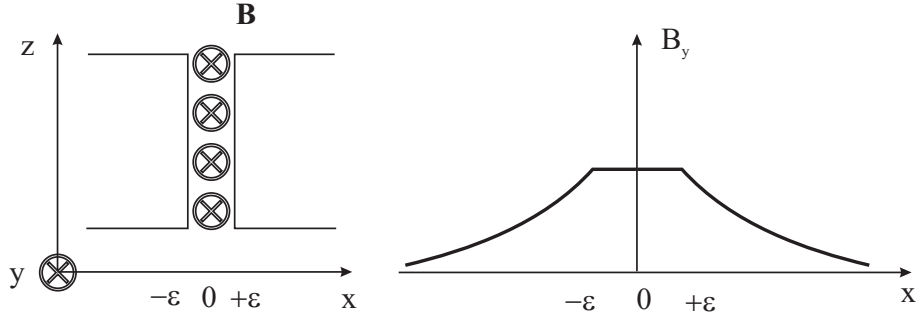


Рис. 40: Джозефсоновский контакт с внешним магнитным полем

Выбирая точки 1 и 2 лежащими в глубине сверхпроводников, там где магнитное поле отсутствует и вычисляя интеграл

$$\int_2^1 A_x dx = dBz, \quad \text{где} \quad d = 2\epsilon + 2\lambda,$$

для плотности тока получим

$$j(z) = \frac{I_c^0}{L} \sin \chi(z) \quad \text{где} \quad \chi(z) = \left[ \theta_1 - \theta_2 + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \frac{z}{L} \right], \quad (241)$$

где  $I_c$ - критический ток перехода в отсутствие магнитного поля,  $L$ - длина контакта,  $\Phi = BdL$  - полный поток магнитного поля через боковую поверхность контакта,  $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$  -квант потока. Из формулы видно, что плотность тока в присутствии магнитного поля зависит от координаты вдоль перехода  $z$ . Для полного тока, измеряемого в экспериментах, получим следующее выражение

$$I = \frac{I_c^0}{L} \int_0^L j(z) dz = -I_c^0 \frac{\Phi_0}{2\pi\Phi} \cos \left[ \theta_1 - \theta_2 + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \frac{z}{L} \right] \Big|_0^L = I_c^0 \frac{\Phi_0}{2\pi\Phi} \left\{ -\cos \left[ \theta_1 - \theta_2 + \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0} \right] + \cos [\theta_1 - \theta_2] \right\}.$$

преобразуя разность косинусов мы можем переписать формулу для полного тока в виде, аналогичном формуле для джозефсоновского тока 224

$$I = I_c(\Phi) \sin(\chi_0), \quad \text{где} \quad \chi_0 = \theta_1 - \theta_2 + \pi\Phi/\Phi_0. \quad (242)$$

Здесь  $I_c(\Phi)$  - критический ток контакта, зависящий от магнитного поля и определяемый выражением

$$I_c = I_c^0 \frac{\sin x}{x}, \quad \text{где} \quad x = \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}. \quad (243)$$

Зависимость критического тока от магнитного поля показана на Рис.41.

#### 9.4 Распределенный джозефсоновский контакт

В предыдущем разделе при изучении влияния магнитного поля мы пренебрегли влиянием собственного тока на магнитное поле. Для достаточно длинного контакта такое пренебрежение будет незаконным и мы сейчас попробуем избавиться от этого недостатка теории. В этом случае даже в отсутствие внешнего поля распределение тока и джозефсоновской разности фаз вдоль контакта может стать неоднородным и нам необходимо учесть эту возможность. Вспомним выражение 226 для джозефсоновской разности фаз

$$\chi = \theta_1 - \theta_2 - \frac{2e}{\hbar c} \int_2^1 A_x dx,$$

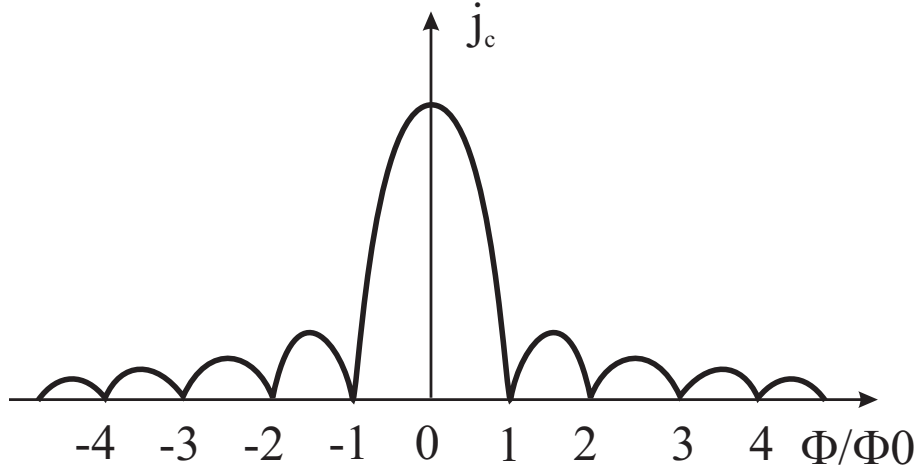


Рис. 41: Зависимость критического тока джозефсоновского контакта от магнитного поля

и результат предыдущего параграфа 241, что в однородном магнитном поле эта величина меняется линейно

$$\chi(z) = \left[ \theta_1 - \theta_2 + \frac{2|e|(d+2\lambda)Bz}{c\hbar} \right].$$

Здесь мы несколько изменили обозначения и обозначили  $d$  - ширину зазора между сверхпроводниками, которая в предыдущих разделах была обозначена как  $2\epsilon$ . Эту связь можно представить в виде

$$\frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{2|e|(d+2\lambda)B}{c\hbar}, \quad (244)$$

и заметить, что она останется справедливой и при  $B = B_y$ , зависящем от  $z$ , лишь бы характерный масштаб изменения  $B(z)$  вдоль перехода -  $L_B$  был бы велик по сравнению с магнитной шириной  $d + 2\lambda$ , так что изменения магнитного поля были бы плавными в этом масштабе и локально все бы выглядело, как в однородном поле. Таким образом мы получили, что магнитное поле (и плотность магнитного потока на единицу длины) выражается через пространственную производную от джозефсоновской фазы. Используя джозефсоновское соотношение 232 и определение напряжения  $V = dE_y$  можно выразить электрическое поле через временную производную от джозефсоновской фазы и вместе с 244 записать

$$E_x = \frac{\hbar}{2|e|d} \frac{1}{d} \frac{\partial\chi}{\partial t}; \quad B_y = \frac{c\hbar}{2|e|d+2\lambda} \frac{1}{d+2\lambda} \frac{\partial\chi}{\partial z}. \quad (245)$$

Можно также определить поток на единицу длины  $\Phi = B_y(d+2\lambda)$  и получить для него соотношение, очень похожее на джозефсоновское и являющееся его "пространственным" аналогом

$$\Phi = \frac{\hbar c}{2|e|} \frac{\partial\chi}{\partial z}.$$

Для того, чтобы получить уравнение для джозефсоновской фазы воспользуемся уравнением Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial\epsilon E}{\partial t}$$

в которое подставим выражения 245 для полей в зазоре джозефсоновского контакта  $B_y$  и  $E_x$ , а также выражение для плотности тока  $j = j_n + j_s$  через джозефсоновскую разность фаз

$$j = \frac{\hbar}{2|e|r} \frac{\partial\chi}{\partial t} + j_c \sin\chi,$$

где  $r$  есть сопротивление единицы площади контакта.

В результате придем к уравнению

$$\frac{\hbar}{2|e|} \left[ \frac{\epsilon}{4\pi d} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{c^2}{4\pi(d+2\lambda)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] + j_c \sin \chi = 0, \quad (246)$$

описывающему динамику джозефсоновской фазы в длинном джозефсоновском переходе. Это уравнение в отсутствие члена  $\frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial t}$  называется уравнением Синус Гордона, а при учете  $\dot{\chi}$ - возмущенным уравнением Синус Гордона. Это уравнение в частных производных описывает нелинейные волны в джозефсоновском контакте. Оно должно быть дополнено граничными условиями, выражающими равенство внутреннего магнитного поля  $B$  на краях перехода  $z = 0, L$  внешнему полю  $B_e$ . Используя связь магнитного поля с фазой 245 получаем граничное условие в виде

$$B_e|_{0, L} = \frac{c\hbar}{2|e|} \frac{1}{d+2\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial z} \Big|_{0, L} \quad (247)$$

Уравнение 246 для фазы  $\chi$  фактически представляет собой уравнение непрерывности, что изменение тока (на единицу ширины контакта), текущего вдоль перехода по одному из берегов  $\frac{\partial I}{\partial x}$  равно плотности тока, стекающего поперек перехода  $j$ , или

$$\frac{\partial I}{\partial x} = j.$$

Выражение для тока поперек перехода с учетом тока смещения или емкостного тока есть

$$j = \frac{\hbar}{2|e|} \left[ \frac{\epsilon}{4\pi d} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] + j_c \sin \chi,$$

а выражение для тока вдоль перехода  $I$  получается из граничного условия  $B = 4\pi I/c$  и связи магнитного поля с фазой

$$I = \frac{c}{4\pi} \frac{c\hbar}{2|e|} \frac{1}{d+2\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Нетрудно видеть, что эти соотношения приводят нас к уравнению 246.

Рассмотрим некоторые частные решения этого уравнения, описывающие простые физические ситуации.

#### 9.4.1 Экранирование слабого магнитного поля в контакте. Джозефсоновская длина

Рассмотрим стационарные решения уравнения 246, такие, что  $\partial_t \chi = 0$ . Они удовлетворяют статическому уравнению, впервые полученному Феррелом и Прейнджем в 1964 году. Это уравнение, получающееся из 246 делением на  $j_c$  и пренебрежением временными переменными, мы представим в виде

$$-\lambda_J^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sin \chi = 0, \quad (248)$$

где  $\lambda_J$ , - так называемая джозефсоновская длина, равная

$$\lambda_J = \left[ \frac{\hbar c^2}{8\pi|e|j_c(d+2\lambda)} \right]^{1/2}. \quad (249)$$

Рассмотрим случай, когда имеется внешнее магнитное поле  $B_e = H$ , величина которого достаточно мала, так, что  $\sin \chi \approx \chi$  и контакт занимает область  $0, L$ . Мы придем к линейному уравнению для фазы

$$-\lambda_J^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \chi = 0, \quad (250)$$

и, поскольку,  $B \sim \partial_z \chi$ , к точно такому же уравнению для магнитного поля, решение которого, удовлетворяющее граничным условиям  $247 B|_{0,L} = H$  есть

$$B = H \frac{\cosh \frac{z-L/2}{\lambda_J}}{\cosh \frac{L}{2\lambda_J}}.$$

Это решение описывает экранирование слабого магнитного поля с масштабом  $\lambda_J$  и его график приведен на Рис.42 При условии, что  $\lambda_J \ll L$ , а также  $|z| \ll L$  и  $|z-L| \ll L$  это решение переходит в

$$B = \begin{cases} H e^{-z/\lambda_J} \\ H e^{(z-L)/\lambda_J} \end{cases} \quad (251)$$

описывающее экранирование вблизи концов джозефсоновского контакта. Видно, что экранирование в джозефсоновском контакте происходит с характерной длиной  $\lambda_J$ , которая значительно превышает длину экранирования в сплошном сверхпроводнике  $\lambda$ . На Рис.42 изображено экранирование магнитного поля (показаны линии тока) в сверхпроводящем образце, "разрезанным" джозефсоновским контактом. Ток, текущий в объемном сверхпроводнике в слое  $\lambda$ , в окрестности контакта проникает на глубину  $\lambda_J$ . Решив эту задачу, сейчас мы можем сказать, что описание джозефсоновского контакта, как сосредоточенного, возможно при  $L \ll \lambda_J$ , при этом экранировки внешнего поля не происходит.

Таким образом, длинный джозефсоновский контакт является как бы двумерным сверхпроводником, магнитное поле проникает в который только вдоль его плоскости. Как мы увидим, эта аналогия простирается еще дальше и в джозефсоновский переход могут проникать вихри, во многом аналогичные вихрям Абрикосова в объемном сверхпроводнике. Идея о существовании таких вихрей была высказана Джозефсоном.

#### 9.4.2 Джозефсоновские вихри

В предыдущем параграфе мы считали поле слабым и линеаризовывали уравнение 248. В случае сильного поля этого делать нельзя и мы должны суметь получить точные нелинейные решения этого уравнения. Уравнения такого типа интегрируются следующим образом. Умножая уравнение 248 на  $\chi_z$  запишем его в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \lambda_J \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + 2 \cos \chi \right] = 0,$$

откуда находим первый интеграл

$$\left( \lambda_J \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)^2 + 2 \cos \chi = C,$$

где  $C$  произвольная постоянная, значение которой должно быть выбрано исходя из граничных условий. Это уравнение с разделяющимися переменными, оно легко решается в квадратурах как

$$\frac{z - z_0}{\lambda_J} = \int_{\pi}^{\chi} \frac{d\theta}{\sqrt{C - 2 \cos \theta}} \quad (252)$$

Интеграл в правой части есть эллиптический интеграл и поэтому общее решение уравнения выражается 248 через эллиптические функции. Мы, однако, не будем искать общее решение, а найдем лишь его солитонное или уединенное решение, магнитное поле и ток в котором локализованы, или, выражаясь более строго, спадают при  $z \rightarrow \pm\infty$ . Нетрудно видеть, что для решений такого типа необходимо выбрать  $C = 2$ . Интеграл в 252 тогда вычисляется в элементарных функциях путем следующих преобразований

$$\frac{z - z_0}{\lambda_J} = \int_{\pi}^{\chi} \frac{d\theta}{\sqrt{2 - 2 \cos \theta}} = \int_{\pi}^{\chi} \frac{d\theta}{2 \sin \theta/2} = \int_{\pi}^{\chi} \frac{d \operatorname{tg} \theta/4}{\operatorname{tg} \theta/4} = \ln \operatorname{tg} \chi/4, \quad (253)$$

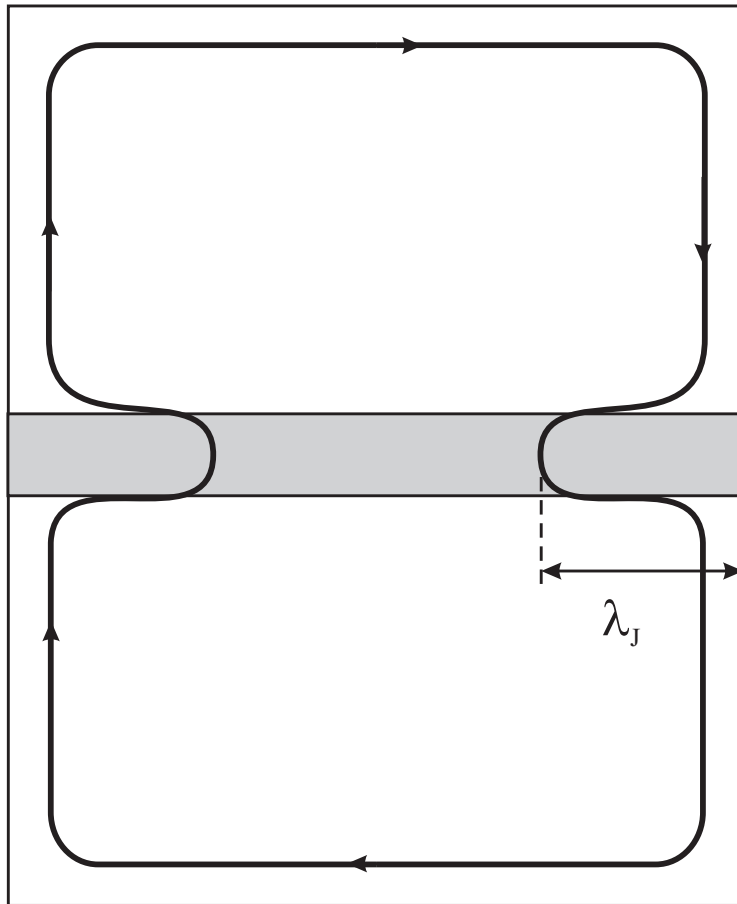
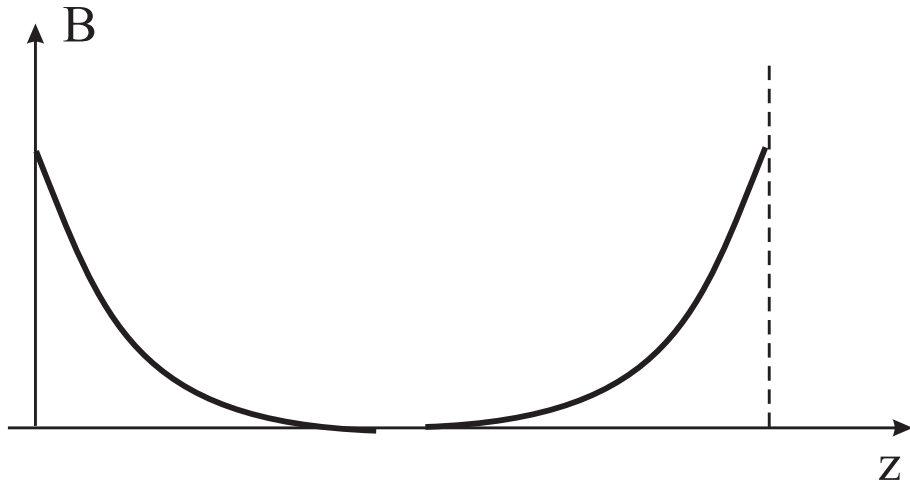


Рис. 42: Экранирование слабого магнитного поля в джозефсоновском контакте

откуда находим в явном виде решение, описывающее одиночный джозефсоновский вихрь

$$\chi = 4 \operatorname{arctg} e^{(z-z_0)/\lambda_J}. \quad (254)$$

Распределение фазы, магнитного поля и тока в котором изображено на Рис.43 Поскольку вихрь

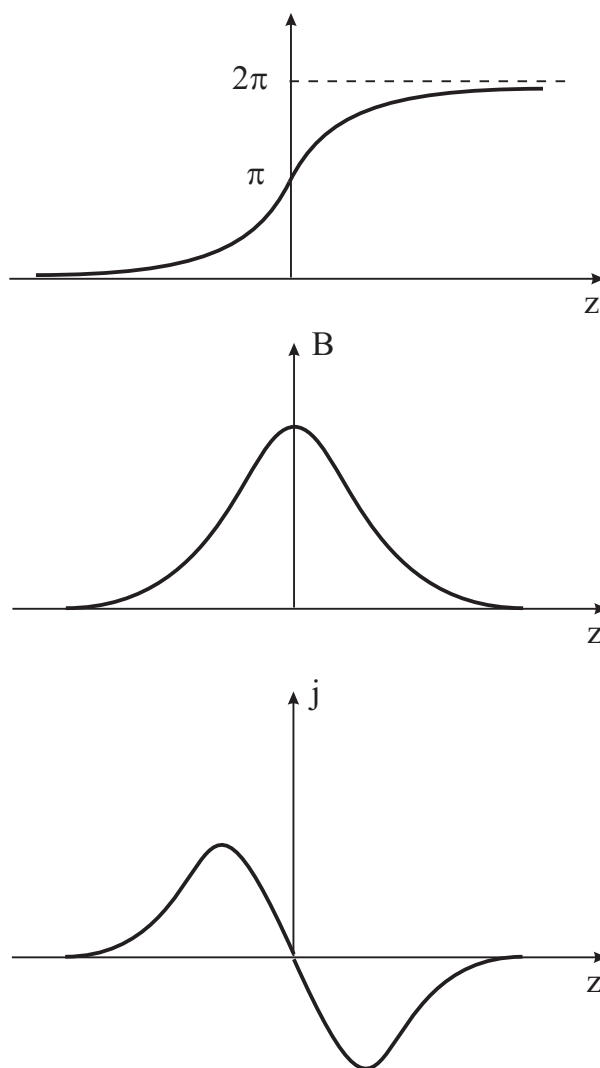


Рис. 43: Распределение фазы, магнитного поля и тока в джозефсоновском вихре

соответствует перевороту джозефсоновской фазы на  $2\pi$  нетрудно показать, что он несет один квант магнитного потока, как и обычный вихрь Абрикосова. Действительно

$$\Phi = (d + 2\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} B dz = \frac{\Phi_0}{2\pi(d + 2\lambda)} (d + 2\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \chi}{\partial z} dz = \Phi_0.$$

Итак, мы приходим к выводу, что джозефсоновский контакт во многом аналогичен сверхпроводнику второго рода, т.е. достаточно большое магнитное поле проникает в него в виде вихрей. На Рис.44 с помощью линий тока показано как проникает в переход достаточно сильное магнитное поле. При увеличении поля концентрация вихрей увеличивается, но из-за того, что у джозефсоновских вихрей нет нормальной сердцевинки, перехода в нормальное состояние, в отличие от вихревого абрикосовского состояния не происходит ни при каком магнитном поле. Естественно, это магнитное поле не должно разрушать сверхпроводимость в берегах контакта.

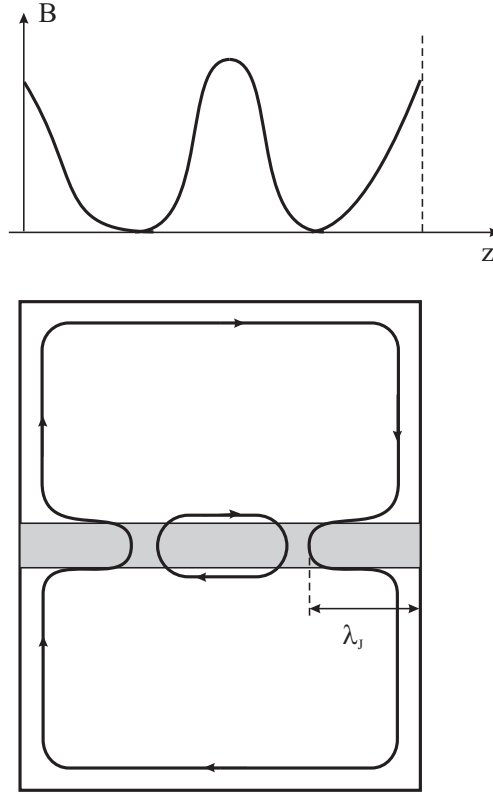


Рис. 44: Проникновение магнитного поля в джозефсоновский переход

### 9.4.3 Волны в длинном джозефсоновском контакте

Уравнение 246 представляет собой нелинейное волновое уравнение, описывающее распространение возмущений фазы вдоль контакта. Прежде чем начинать рассмотрение свойств этих волн, приведем это уравнение к безразмерному виду. Поделив всё уравнение на  $j_c$  можно заметить, что все члены стали безразмерными, и следовательно, коэффициент при  $\partial^2/\partial t^2$  приобретает размерность квадрата времени, или квадрата обратной частоты, обозначаемой  $\omega_J$ , и называемой джозефсоновской плазменной частотой. Коэффициент при  $\partial^2/\partial x^2$  приобретает размерность квадрата длины, уже известной нам  $\lambda_J$ . Произведение  $\omega_J \lambda_J$  имеет размерность скорости и носит название скорости Свихарта  $v_s$ . Джозефсоновская плазменная частота, джозефсоновская глубина и скорости Свихарта выражаются через параметры контакта следующим образом

$$\omega_J = \sqrt{\frac{8\pi e d j_c}{\hbar \varepsilon}}, \quad \lambda_J = \left[ \frac{\hbar c^2}{8\pi |e| j_c (d + 2\lambda)} \right]^{1/2}, \quad v_s = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{d}{d + 2\lambda}}. \quad (255)$$

Выбрав в качестве масштабов времени и координаты  $\omega_J^{-1}$  и  $\lambda_J$  соответственно, приведем уравнение 246 к безразмерному виду

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \sin \chi = 0. \quad (256)$$

Здесь  $\gamma$  - безразмерный коэффициент затухания

$$\gamma = \omega_J \frac{\hbar}{2|e|r} = \sqrt{\frac{4\pi d}{\epsilon r}} \sqrt{\frac{\hbar}{2|e|rj_c}}$$

Для волн малой амплитуды мы можем линеаризовать уравнение 246 приближенно положив  $\sin \chi \approx \chi$  и прийти к линейному уравнению Клейна - Гордона

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial \chi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \chi = 0. \quad (257)$$

Отыскивая его решение в форме  $\chi \sim \sum_{\omega, k} \chi_{\omega, k} e^{-i\omega t + ikz}$  и требуя нетривиальность решения для  $\chi_{\omega, k}$  получим дисперсионное уравнение для электромагнитных или свихартовских волн в джозефсоновском контакте

$$\omega(\omega + i\gamma) = k^2 + 1. \quad (258)$$

График реальной части частоты которого при  $\gamma < 1/2$  приведен на Рис.45. Спектр этих свихар-

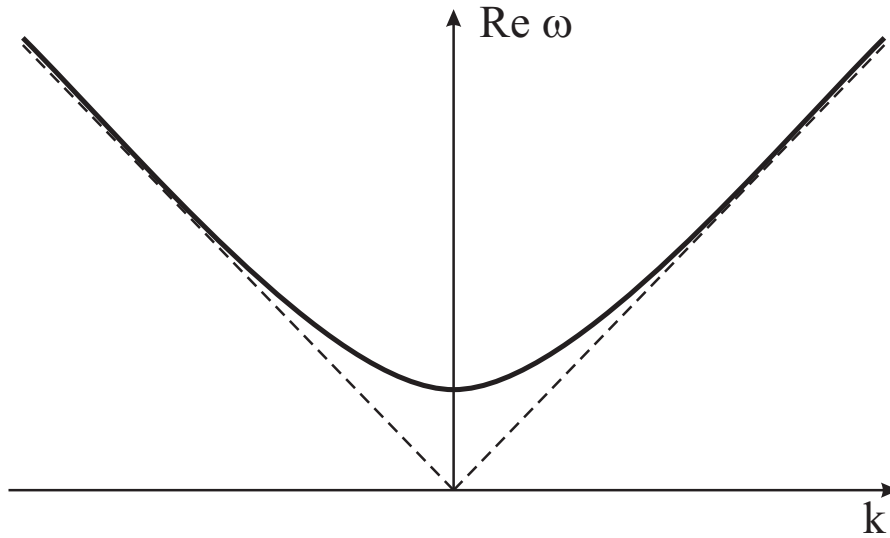


Рис. 45: Дисперсия электромагнитных волн в джозефсоновском контакте

товских волн очень похоже на спектр плазменных волн. Из-за этой аналогии свихартовские волны называют плазменными джозефсоновскими волнами, а частоту  $\omega_J$  - плазменной частотой джозефсоновского перехода. Волны с частотой меньше плазменной не могут распространяться в контакте, им соответствует комплексное волновое число  $k = \sqrt{\omega(\omega + i\gamma) - 1}$ . Эту экранировку для  $\omega = 0$  мы уже обсуждали в предыдущем разделе. Очень высокочастотные волны практически не имеют дисперсии и распространяются со скоростью Свихарта.

## 9.5 Квантовая интерференция и квантовые интерферометры

В разделе 9.3 мы показали, что критический ток джозефсоновского перехода очень сильно зависит от магнитного поля. Это свойство джозефсоновских контактов используется для создания так называемых квантовых сверхпроводящих интерферометров, по английски - SQUID (Superconducting Quantum Interference Device), предназначенных для измерения магнитного поля. Мы рассмотрим две возможные конструкции сверхпроводящих интерферометров, чаще всего применяемых на практике.



### 9.5.1 Одноконтактный SQUID

Рассмотрим достаточно толстое  $d \gg \lambda$  сверхпроводящее кольцо с одним джозефсоновским контактом малого размера  $d \ll \lambda_J$ , помещенное в магнитное поле, создающее поток через кольцо, как изображено на Рис.46. Будем считать что площадь контакта достаточно мала и ток через джозеф-

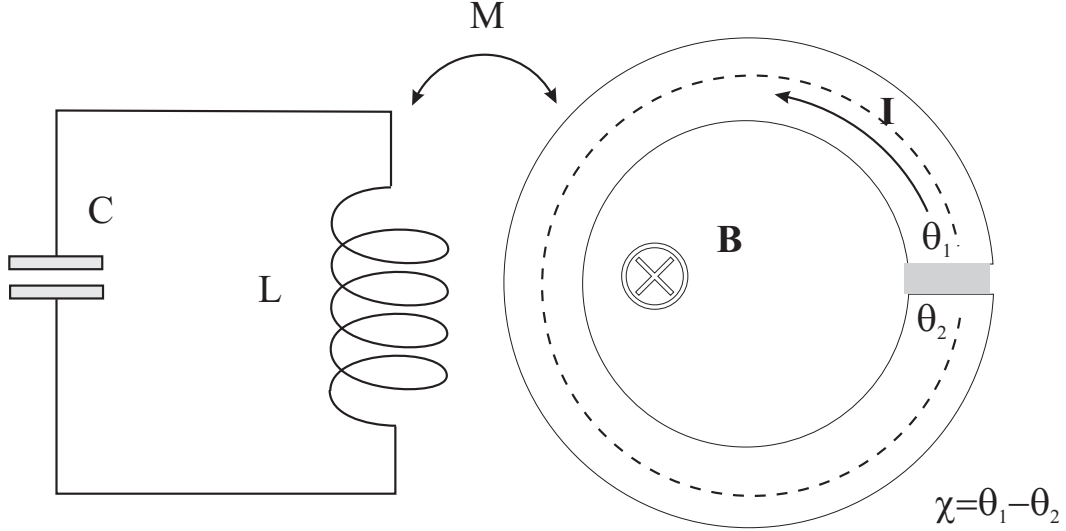


Рис. 46: Одноконтактный СКВИД или СКВИД переменного тока

соновский контакт  $I$  определяется выражением 233

$$\frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial \chi}{\partial t} + I_c \sin \chi = I. \quad (259)$$

Вне области контакта, ток течет в тонком слое вблизи поверхности сверхпроводящего кольца, так что внутри можно считать плотность тока равной нулю  $\mathbf{j} = 0$ . Вспомнив выражение для тока в теории Гинзбурга-Ландау  $\mathbf{j} = |\psi|^2 \mathbf{v}_s$  и заметив, что параметр порядка в кольце отличен от нуля, придем к соотношению

$$\hbar \nabla \theta = \frac{2e}{c} \mathbf{A}, \quad (260)$$

справедливому в любой точке сверхпроводника, где  $v_s = 0$ . Выберем контур внутри сверхпроводника, идущий с одного берега джозефсоновского контакта из точки 1 до другого, до точки 2, как показано пунктиром на Рис.46 и проинтегрировав соотношение 260 по этому контуру, придем к соотношению

$$\int_1^2 \nabla \theta dl = \theta_2 - \theta_1 = \frac{2e}{\hbar c} \int_1^2 \mathbf{A} dl \approx \frac{2e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} dl = -2\pi \Phi / \Phi_0, \quad (261)$$

связывающее разность фаз  $\chi = \theta_1 - \theta_2$  с магнитным потоком через кольцо. При получении этой формулы мы замкнули контур при вычислении интеграла от векторного потенциала, опустив малый вклад от окрестности джозефсоновского контакта. Изменение знака в последнем равенстве связано с определением кванта потока как положительной величины  $\Phi_0 = \pi \hbar c / |e|$ . Итак мы получили, что джозефсоновская разность фаз связана с потоком через сверхпроводящее кольцо

$$\chi = 2\pi \Phi / \Phi_0. \quad (262)$$

Поток магнитного поля определяется потоком внешнего магнитного поля  $\Phi_e$  и магнитным полем, созданным током, текущим по кольцу. Учитывая это, для потока запишем следующее соотношение

$$\Phi = \Phi_e - \frac{1}{c^2} LI, \quad (263)$$

или, вводя переменную  $\chi_e = 2\pi\Phi_e/\Phi_0$ , аналогично 262 перепишем это соотношение в виде

$$\chi = \chi_e - \frac{2\pi}{c^2\Phi_0}LI, \quad (264)$$

Подставим ток, найденный из этого соотношения в уравнение 259, и тогда получим замкнутое уравнение для динамики фазы  $\varphi$  или пропорционального ей магнитного потока в сверхпроводящем кольце

$$\frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial\chi}{\partial t} + I_c \sin\chi + \frac{c^2\Phi_0}{2\pi L}(\chi - \chi_e) = 0. \quad (265)$$

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения, соответствующие тому, что в кольце течет ток, не превышающий критический ток джозефсоновского контакта. Полагая  $\partial_t = 0$  приходим к уравнению связывающему  $\chi$  и  $\chi_e$

$$\chi = \chi_e - \beta \sin\chi, \quad (266)$$

где параметр

$$\beta = \frac{2\pi LI_c}{c^2\Phi_0},$$

есть безразмерная индуктивность. Эту зависимость легко нарисовать. На Рис.47 показана зависимость магнитного потока через сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом от внешнего магнитного поля при различных значениях безразмерной индуктивности  $\beta$ . При  $\beta < 1$  зависимость

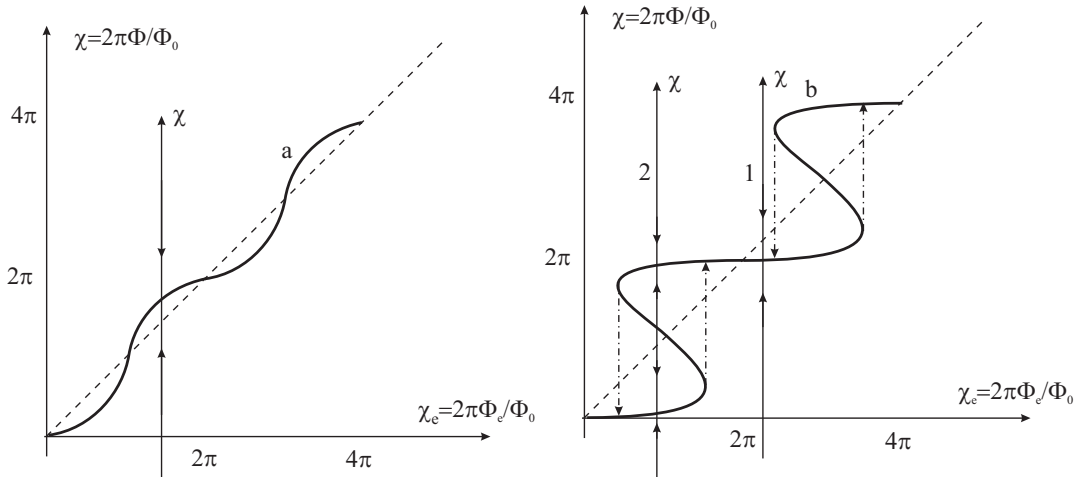


Рис. 47: Зависимость стационарного магнитного потока через сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом от внешнего магнитного поля при различных значениях безразмерной индуктивности  $\beta$ ; а)- $\beta < 1$ , б)- $\beta > 1$ .

$\chi(\chi_e)$  однозначна, при  $\beta > 1$  кривая становится неоднозначной. Теперь, зная эту кривую, можно построить фазовое пространство уравнения 265. Оно одномерно, поскольку это уравнение первого порядка и может быть изображено в виде фазовой прямой, примеры которых при различных значениях параметров  $\chi_e$  и  $\beta$  показаны на Рис.47. Используя нестационарное уравнение 265 можно легко найти знаки производных  $\dot{\chi}$  и расставить стрелки, определяющие направления движения на фазовой прямой. Легко видеть из рисунка, что состояния равновесия, соответствующие промежуточным ветвям неоднозначной кривой  $\chi(\chi_e)$  при  $\beta > 1$ , на Рис.47 они показаны крестиком, неустойчивы, и при плавном повышении внешнего потока, внутренний поток будет совершать скачки, как показано на Рис.47.

Таким образом, состояние сверхпроводящего кольца с джозефсоновским контактом определяется отношением внешнего потока к кванту магнитного потока. Из-за того, что квант потока очень

мал  $\Phi_0 = 2 \times 10^{-7} CGS$ , а площадь кольца может быть сделана большой, такой одноконтактный СКВИД является очень чувствительным инструментом для измерения магнитного поля. Состояние сверхпроводящего кольца обычно определяется с помощью включения этого кольца в электродинамический резонатор, как показано на Рис.46, и измерения его электродинамических характеристик.

### 9.5.2 Двухконтактный SQUID

Недостатком конструкции СКВИДа, рассмотренного в предыдущем разделе, является необходимость проведения высокочастотных измерений для регистрации изменений состояния сверхпроводящего кольца при изменении внешнего магнитного поля. Регистрация на нулевой частоте невозможна из-за того, что сверхпроводящее кольцо шунтирует джозефсоновский контакт по постоянному току. Этого недостатка лишен, так называемый, двухконтактный СКВИД или СКВИД постоянного тока. Он представляет собой сверхпроводящее кольцо с двумя джозефсоновскими контактами, к которому подводится постоянный ток, как показано на Рис.48. Запишем суммарный ток  $I$ , который есть

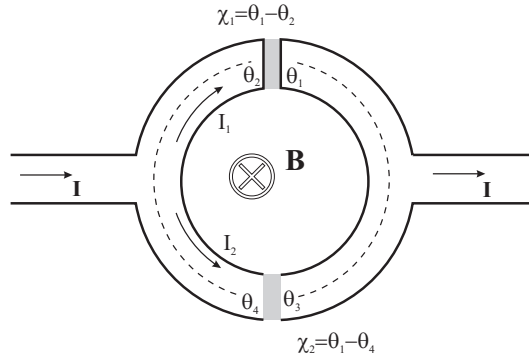


Рис. 48: Двухконтактный СКВИД

сумма токов, текущим по двум сторонам кольца, называемыми плечами сверхпроводящего интерферометра. Поскольку каждый из токов протекает через джозефсоновские контакты, то суммарный ток равен

$$I = \frac{\hbar}{2|e|R_1} \frac{\partial \chi_1}{\partial t} + I_{c1} \sin \chi_1 + \frac{\hbar}{2|e|R_2} \frac{\partial \chi_2}{\partial t} + I_{c2} \sin \chi_2. \quad (267)$$

Теперь, как и в случае одноконтактного сквида, получим связь между джозефсоновскими фазами и потоком, путем интегрирования выражения для сверхскорости  $v_s$  (см. уравнение 260) по контуру  $\int_1^3 + \int_4^2$ , идущему в глубине сверхпроводящего кольца, там, где сверхток отсутствует. Мы получим соотношение

$$\chi_2 = \chi_1 - 2\pi\Phi/\Phi_0, \quad (268)$$

аналогичное уравнению 262. Магнитный поток, как и в одноконтактном СКВИДе, определяется внешним магнитным потоком, так и токами, текущими по плечам СКВИДа. Мы не будем рассматривать общий случай произвольных индуктивностей, а сделаем упрощающее предположение, что собственная индуктивность кольца мала и магнитный поток через кольцо просто равен внешнему магнитному потоку  $\Phi = Phi_e$ . Введя новую переменную  $\chi$  соотношениями

$$\chi_1 = \chi - \pi\Phi/\Phi_0, \quad \chi_2 = \chi + \pi\Phi/\Phi_0,$$

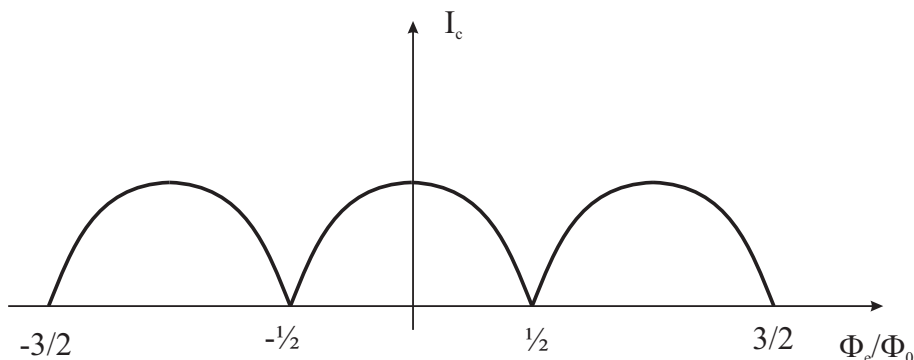
так, чтобы связь 268 удовлетворялась автоматически, и предположив для простоты идентичность контактов  $I_{c1} = I_{c2} = I_c^0$ ,  $R_1 = R_2 = R$  из уравнения 267 для фазы  $\chi$  получим

$$I = 2 \frac{\hbar}{2|e|R} \frac{\partial \chi}{\partial t} + 2I_c^0 \sin \chi \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (269)$$

которое эквивалентно уравнению одиночного джозефсоновского контакта с нормальным сопротивлением  $R/2$  и критическим током

$$I_c = 2I_c^0 \left| \cos \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right|,$$

периодически зависящим от потока, пронизывающего контур СКВИДа. График этой зависимости, аналогичный картине интерференции волн от двух источников, показан на Рис.49 Измеряя вольт-



3/2

Рис. 49: Зависимость критического тока двухконтактного СКВИДа от потока внешнего магнитного поля

амперную кривую такого двухконтактного СКВИДа мы можем определить критический ток, а по критическому току можно определить магнитное поле в кольце.

## Литература для дальнейшего чтения

1. В.В. Шмидт, Введение в физику сверхпроводников.- М.: МЦНМО, 2002
2. А.А. Абрикосов, Основы теории металлов.- М.: Наука, 1987
3. М. Тинкхам, Введение в сверхпроводимость.- М.: Атомиздат, 1980
4. Де. Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов.- М.: Мир, 1968
5. Дж. Шриффер, Теория сверхпроводимости.- М.: Наука, 1970
6. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Курс теоретической физики, т. 5,8,9.- М.: Наука, 2001
7. К.К. Лихарев, Введение в динамику джозефсоновских переходов.- М.: Наука, 1985
8. И.О. Кулик, И.К. Янсон, Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах.- М.: Наука, 1970
9. А. Бароне, Дж. Патерно, Эффект Джозефсона. Физика и применения.- М.: Мир, 1984