В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННЫЕ СЕДЕОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

$$\mathbf{e}_t \mathbf{e}_r = i\,\mathbf{e}_{tr}$$

Институт физики микроструктур РАН
Нижний Новгород 2014

В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННЫЕ СЕДЕОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Институт физики микроструктур РАН
Нижний Новгород 2014

Мироновой Г.В.,

жене и маме

Содержание

Предисловие

Настоящая книга представляет собой систематизированное изложение алгебры шестнадцатикомпонентных пространственно-временных величин - “седеонов” и ее применений для описания квантовых частиц и полей. В книгу вошли результаты нескольких статей, опубликованных авторами в период 2008-2014 г.г. Она содержит большое количество тщательно отобранного справочного материала, касающегося вопросов применения различных многокомпонентных алгебр в приложении к физическим задачам и, возможно, будет полезна в качестве введения в смежные области применения гиперкомплексных чисел в физике.

Авторы выражают благодарность Г.В. Мироновой за помощь и моральную поддержку, С. Королеву за помощь, J. Köplinger за полезные обсуждения и В.В. Курину за стимулирующие дискуссии.

Авторы будут признательны каждому, кто сообщит о любых замеченных недостатках.

В.Л.Миронов и С.В.Миронов

г. Нижний Новгород

Март 2014

Виктор Миронов : mironov@ipmras.ru

Сергей Миронов : sermironov@rambler.ru

Введение

Одна из первых некоммутативных многокомпонентных алгебр – алгебра четырехкомпонентных кватернионов была открыта в 1843 г. В.Гамильтоном [1,2]. По существу, кватернионы представляют собой обобщение комплексных чисел на пространство размерности 4. Вслед за кватернионами Д.Грейвс (1843 г.) и независимо А.Кэли (1845 г.) открыли восьмикомпонентные величины - октонионы [3]. Алгоритм построения октонионов на основе кватернионов носит название процедуры удвоения Кэли-Диксона и позволяет провести обобщение кватернионов на любые пространства размерности 2^n и, в частности, построить шестнадцатикомпонентные гиперкомплексные числа седенионы [4]. История открытия гиперкомплексных чисел частично рассмотрена в работах [3,5]. Систематическое изложение теории кватернионов и гиперкомплексных алгебр более высокой размерности можно найти в книгах на русском и английском языках [6-11]. Обширная библиография по применению кватернионов в физике содержится в обзорах [12,13].

Существенным недостатком алгебр гиперкомплексных чисел размерности выше 4 является их неассоциативность. Это значительно затрудняет их применение для описания физических систем, поскольку во всех уравнениях приходится фиксировать определенную последовательность действия всех операторов. Однако гиперкомплексные числа Кэли-Диксона не являются единственной выделенной алгебраической системой, на основе которой можно построить описание физических систем. Существуют и другие альтернативные подходы, основанные на применении ассоциативных алгебр многокомпонентных векторов и алгебр Клиффорда [14,15].

В настоящей книге приводится систематизированное изложение предложенной авторами ассоциативной алгебры шестнадцатикомпонентных пространственно-временных величин “седеонов” и ее применений для описания квантовых частиц и полей [16-19].

Глава 1. Алгебра седеонов

С математической точки зрения, одной из центральных проблем, рассматриваемых в данной книге, является проблема представления квадратичных форм

$$\sum_{k=1}^{N} A_k^2 \tag{1.1.}$$

в виде произведения двух сомножителей. В общем случае квадратичная форма (1.1.) может быть выражена следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left(A_1^2 + A_2^2 + ... + A_k^2 + ...A_N^2\right)\\&= \left(\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k + ... + \alpha_N A_N\right)\left(\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k + ... + \alpha_N A_N\right).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Такое представление возможно при двух различных вариантах выбора систем коэффициентов α_k. Первый случай отвечает некоммутативным α_k, обладающим следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\alpha_k \alpha_k = 1,\\&\alpha_m \alpha_n = -\alpha_n \alpha_m \text{ (при } m \neq n).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Второй случай соответствует ортогональным α_k, для которых

$$\begin{aligned}&\alpha_k \alpha_k = 1,\\&\alpha_m \alpha_n = 0 \text{ (при } m \neq n).\end{aligned} \tag{1.4}$$

В настоящей книге оба этих подхода применяются для описания пространственно-временных и зарядовых свойств физических систем. Основным инструментом описания выбрана алгебра пространственно-временных седеонов.

Ключевой особенностью алгебры седеонов и основным ее отличием от широко распространенной векторной алгебры Гиббса - Хевисайда является понятие клиффордовского произведения векторов. Рассмотрим два произвольных вектора $\vec{A}$ и $\vec{B}$, записанных в базисе единичных векторов $\vec{\boldsymbol{i}}_1$, $\vec{\boldsymbol{i}}_2$, $\vec{\boldsymbol{i}}_3$:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 + A_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 + A_3\vec{\boldsymbol{i}}_3,\\\vec{B} &= B_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 + B_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 + B_3\vec{\boldsymbol{i}}_3.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Тогда произведением Клиффорда векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ называется прямое произведение следующего вида:

$$\vec{A}\vec{B} = \left(A_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 + A_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 + A_3\vec{\boldsymbol{i}}_3\right)\left(B_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 + B_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 + B_3\vec{\boldsymbol{i}}_3\right)$$
$$\begin{aligned} &= A_1B_1\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 + A_2B_2\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 + A_3B_3\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_3 \\ &+ A_1B_2\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_2 + A_2B_3\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_3 + A_3B_1\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_1 \\ &+ A_1B_3\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_3 + A_2B_1\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_1 + A_3B_2\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_2 \ . \end{aligned} \tag{1.6}$$

В зависимости от правил умножения и коммутации базисных элементов произведение Клиффорда может иметь различный результат. В частности, если мы примем правила умножения единичных векторов, соответствующие векторной алгебре Гиббса - Хевисайда

$$\begin{aligned} &\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_1 = \vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_2 = \vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_3 = 1 \,, \\ &\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_2 = -\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_1 = \vec{\boldsymbol{i}}_3 \,, \\ &\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_3 = -\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_2 = \vec{\boldsymbol{i}}_1 \,, \\ &\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_1 = -\vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_1 = \vec{\boldsymbol{i}}_2 \,, \end{aligned} \tag{1.7}$$

тогда клиффордовское произведение двух векторов равно

$$\begin{aligned} \vec{A}\vec{B} = &A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \\ &+ A_2B_3\vec{\boldsymbol{i}}_1 + A_3B_1\vec{\boldsymbol{i}}_2 + A_1B_2\vec{\boldsymbol{i}}_3 \\ &- A_3B_2\vec{\boldsymbol{i}}_1 - A_1B_3\vec{\boldsymbol{i}}_2 - A_2B_1\vec{\boldsymbol{i}}_3 \ , \end{aligned} \tag{1.8}$$

т.е. представляет собой сумму скалярного и векторного произведений. Такой подход позволяет проводить одновременные вычисления со скалярными и векторными величинами и является особенно плодотворным в приложении к релятивистской физике. Однако правила умножения, принятые в векторной алгебре, обладают одним существенным недостатком. Рассмотрим, например, клиффордовский квадрат единичного вектора $\vec{\boldsymbol{i}}_3$. Следуя правилам векторной алгебры (1.7), клиффордовский квадрат этого вектора можно представить следующим образом:

$$\vec{\boldsymbol{i}}_3^{\,2} = \vec{\boldsymbol{i}}_3\vec{\boldsymbol{i}}_3 = \vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_2 = -\vec{\boldsymbol{i}}_2\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_1\vec{\boldsymbol{i}}_2 = -1 \,, \tag{1.9}$$

что находится в противоречии с исходными правилами (1.7). Для преодоления этого противоречия требуется построение альтернативной алгебры, основанной на других правилах умножения.

1.1. Пространственно-временные седеоны

Алгебра седеонов [16] включает в себя четыре группы величин, отличающихся своими свойствами по отношению к операциям пространственно-временной инверсии.

- Абсолютные скаляры (V) и абсолютные векторы ($\vec{V}$) не изменяются при пространственной и временной инверсии.
- Временные скаляры ($V_{\mathbf{t}}$) и временные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{t}}$) изменяются (меняют знак) при временной инверсии, но не изменяются при пространственной инверсии.
- Пространственные скаляры ($V_{\mathbf{r}}$) и пространственные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{r}}$) изменяются при пространственной инверсии, но не изменяются при временной инверсии.
- Пространственно-временные скаляры ($V_{\mathbf{tr}}$) и пространственно-временные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{tr}}$) изменяются и при временной и при пространственной инверсии.

Индексами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{r}$ мы обозначаем преобразования инверсии ($\mathbf{t}$ для временной инверсии и $\mathbf{r}$ для пространственной инверсии), которые изменяют соответствующие величины. Все введенные величины могут быть интегрированы в один пространственно-временной объект, который мы назовем “седеон” и будем обозначать заглавной буквой с волной, выделенной жирным шрифтом - $\tilde{\mathbf{V}}$. Пространственно-временной седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{V}} = V + \vec{V} + V_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + V_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + V_{\mathbf{tr}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} . \qquad (1.10)$$

Введем скалярно-векторный базис $\mathbf{a}_0$, $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, $\vec{\mathbf{a}}_3$, где элемент $\mathbf{a}_0$ представляет собой абсолютную скалярную единицу ($\mathbf{a}_0 \equiv 1$), а элементы $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, $\vec{\mathbf{a}}_3$ являются абсолютными векторами, образующими правую декартовую тройку. В дальнейшем мы будем обозначать единичные абсолютные векторы без стрелки как $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Также мы введем четыре пространственно-временные единицы $\mathbf{e}_0$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_0$ представляет собой абсолютную скалярную единицу ($\mathbf{e}_0 \equiv 1$); $\mathbf{e}_1$ является временной скалярной единицей ($\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_{\mathbf{t}}$); $\mathbf{e}_2$ является пространственной скалярной единицей ($\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_{\mathbf{r}}$);

$\mathbf{e_3}$ является пространственно-временной скалярной единицей ($\mathbf{e_3} \equiv \mathbf{e_{tr}}$). Используя пространственно-временной базис $\mathbf{e}_\alpha$ и скалярно-векторный базис $\mathbf{a}_\beta$ (греческие индексы $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), можно ввести унифицированные седеонные компоненты $V_{\alpha\beta}$ в соответствии со следующими соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&V = \mathbf{e_0} V_{00} \mathbf{a_0} , \\
&\vec{V} = \mathbf{e_0} \left(V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3} \right) , \\
&V_{\mathbf{t}} = \mathbf{e_1} V_{10} \mathbf{a_0} , \\
&\vec{V}_{\mathbf{t}} = \mathbf{e_1} \left(V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3} \right) , \\
&V_{\mathbf{r}} = \mathbf{e_2} V_{20} \mathbf{a_0} , \\
&\vec{V}_{\mathbf{r}} = \mathbf{e_2} \left(V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3} \right) , \\
&V_{\mathbf{tr}} = \mathbf{e_3} V_{30} \mathbf{a_0} , \\
&\vec{V}_{\mathbf{tr}} = \mathbf{e_3} \left(V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3} \right) .
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Тогда седеон (1.10) может быть представлен в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0} &\left(V_{00}\mathbf{a_0} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3} \right) \\
+\mathbf{e_1} &\left(V_{10}\mathbf{a_0} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3} \right) \\
+\mathbf{e_2} &\left(V_{20}\mathbf{a_0} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3} \right) \\
+\mathbf{e_3} &\left(V_{30}\mathbf{a_0} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3} \right) .
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Седеонные компоненты $V_{\alpha\beta}$ являются числами (в общем случае комплексными). В дальнейшем для упрощения записей мы будем опускать символы $\mathbf{a_0}$ и $\mathbf{e_0}$.

Важным свойством седеонов является то, что если два седеона равны между собой, то равны все их шестнадцать пространственно-временных скалярно-векторных компонент. Это позволяет записывать многие соотношения современной релятивистской физики в компактной форме.

Рассмотрим правила умножения базисных элементов $\mathbf{a_n}$ и $\mathbf{e_m}$ (латинские индексы $\mathbf{n}, \mathbf{m} = 1, 2, 3$). Потребуем, чтобы квадрат длины любого вектора был положительно определенной величиной. Тогда вектора $\mathbf{a_n}$ должны удовлетворять следующим правилам:

$$\mathbf{a_n a_n} = \mathbf{a_n^2} = 1, \qquad (1.13)$$

$$\mathbf{a_n a_m} = -\,\mathbf{a_m a_n} \text{ (для } \mathbf{n} \neq \mathbf{m} \text{)}. \qquad (1.14)$$

Кроме того, для существования клиффордовского произведения векторов необходимо потребовать, чтобы имело место следующее правило умножения базисных элементов $\mathbf{a_n}$ (внешнее произведение):

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = i\mathbf{a}_3\,, \quad \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = i\mathbf{a}_1\,, \quad \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 = i\mathbf{a}_2\,. \qquad (1.15)$$

Аналогичные правила введем и для элементов пространственно-временного базиса $\mathbf{e_m}$:

$$\mathbf{e_n e_n} = \mathbf{e_n^2} = 1, \qquad (1.16)$$

$$\mathbf{e_n e_m} = -\,\mathbf{e_m e_n} \text{ (для } \mathbf{n} \neq \mathbf{m} \text{)}, \qquad (1.17)$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_1\,, \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = i\mathbf{e}_2\,. \qquad (1.18)$$

Здесь и далее величина i является мнимой единицей $(i^2 = -1)$. Правила умножения и коммутации для абсолютных единичных векторов $\mathbf{a_n}$ и для пространственно-временных единиц $\mathbf{e_m}$ могут быть представлены для наглядности в виде таблиц (см. Таблица 1 и 2).

Таблица 1. Правила умножения абсолютных единичных векторов.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	1	$i\mathbf{a}_3$	$-i\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_2$	$-i\mathbf{a}_3$	1	$i\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$	$i\mathbf{a}_2$	$-i\mathbf{a}_1$	1

Таблица 2. Правила умножения пространственно-временных единиц.

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	1	$i\mathbf{e}_3$	$-i\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-i\mathbf{e}_3$	1	$i\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$i\mathbf{e}_2$	$-i\mathbf{e}_1$	1

Заметим, что хотя седеонные пространственно-временные единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и единичные векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют антикоммутативные алгебры:

$$\mathbf{e_n e_m} = -\mathbf{e_m e_n},$$

$$\mathbf{a_n a_m} = -\mathbf{a_m a_n},$$

единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ коммутируют с векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a_n e_m} = \mathbf{e_m a_n} \tag{1.19}$$

для любых $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Таким образом, седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ является сложным пространственно-временным объектом, представляющим собой сумму абсолютного скаляра, временного скаляра, пространственного скаляра, пространственно-временного скаляра, абсолютного вектора, временного вектора, пространственного вектора и пространственно-временного вектора.

Седеон может быть представлен в компактной форме. Определяя скалярно-векторные величины как

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{0} &= V_{00}\mathbf{a_0} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}, \\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{1} &= V_{10}\mathbf{a_0} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}, \\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{2} &= V_{20}\mathbf{a_0} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}, \\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{3} &= V_{30}\mathbf{a_0} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3},
\end{aligned} \tag{1.20}$$

мы можем представить седеон (1.12) в следующей компактной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_\mathbf{0} + \mathbf{e_1}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{1} + \mathbf{e_2}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{2} + \mathbf{e_3}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{3}. \tag{1.21}$$

С другой стороны, определяя пространственно-временные седеонные скаляры как

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_0} &= V_{00}\mathbf{a_0} + \mathbf{e_1}V_{10} + \mathbf{e}_2V_{20} + \mathbf{e}_3V_{30}, \\
\mathbf{V_1} &= V_{01}\mathbf{a_0} + \mathbf{e_1}V_{11} + \mathbf{e}_2V_{21} + \mathbf{e}_3V_{31}, \\
\mathbf{V_2} &= V_{02}\mathbf{a_0} + \mathbf{e_1}V_{12} + \mathbf{e}_2V_{22} + \mathbf{e}_3V_{32}, \\
\mathbf{V_3} &= V_{03}\mathbf{a_0} + \mathbf{e_1}V_{13} + \mathbf{e}_2V_{23} + \mathbf{e}_3V_{33},
\end{aligned} \tag{1.22}$$

мы можем записать седеон (1.12) в другой форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V_0} + \mathbf{V}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{V}_3\mathbf{a}_3, \tag{1.23}$$

или с помощью введения седеонного вектора

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{V} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} = \mathbf{V}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{V}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{V}_3\mathbf{a}_3\,, \qquad (1.24)$$

седеон может быть представлен в следующей компактной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_0 + \vec{\mathbf{V}}\,. \qquad (1.25)$$

Далее мы будем обозначать седеонные скаляры и седеонные векторы с помощью заглавных букв жирным шрифтом.

Рассмотрим правила седеонного умножения более детально. Произведение двух седеонов $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{A}_0 + \vec{\mathbf{A}}\right)\left(\mathbf{B}_0 + \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\mathbf{B}_0 + \left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right) + \left[\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right]. \qquad (1.26)$$

Здесь мы ввели обозначение скалярного произведения двух седеонных векторов (внутреннее произведение) с помощью символа “$\cdot$” и круглых скобок:

$$\left(\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}}\right) = \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\,, \qquad (1.27)$$

и седеонного векторного произведения (внешнее произведение) с помощью символа “$\times$” и квадратных скобок:

$$\left[\vec{\mathbf{A}}\times\vec{\mathbf{B}}\right] = i\left(\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 - \mathbf{A}_3\mathbf{B}_2\right) + i\left(\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_1\mathbf{B}_3\right) + i\left(\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\right). \qquad (1.28)$$

В выражениях (1.27) и (1.28) умножение седеонных компонент производится в соответствии с (1.22) и Таблицей 2. Заметим, что в седеонной алгебре определение векторного произведения отличается от принятого в векторной алгебре Гиббса-Хевисайда. Поэтому, например, формула для двойного векторного произведения трех абсолютных векторов $\vec{A}$, $\vec{B}$ и $\vec{C}$ записывается следующим образом:

$$\left[\vec{A}\times\left[\vec{B}\times\vec{C}\right]\right] = -\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) + \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right). \qquad (1.29)$$

Таким образом, седеонное произведение

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{F}_0 + \vec{\mathbf{F}}$$

имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_0 &= \mathbf{A}_0\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{B}_2 + \mathbf{A}_3\mathbf{B}_3\,,\\
\mathbf{F}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{B}_1 + i\mathbf{A}_2\mathbf{B}_3 - i\mathbf{A}_3\mathbf{B}_2\,,\\
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{A}_2\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{B}_2 + i\mathbf{A}_3\mathbf{B}_1 - i\mathbf{A}_1\mathbf{B}_3\,,\\
\mathbf{F}_3 &= \mathbf{A}_3\mathbf{B}_0 + \mathbf{A}_0\mathbf{B}_3 + i\mathbf{A}_1\mathbf{B}_2 - i\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\,.
\end{aligned} \qquad (1.30)$$

1.2. Вращение и пространственно-временное сопряжение

Преобразование вращения седеона $\tilde{\mathbf{V}}$ на угол θ вокруг оси, задаваемой абсолютным единичным вектором $\vec{n}$, осуществляется с помощью седеона

$$\tilde{\mathbf{U}} = \cos(\theta/2) + i\vec{n}\sin(\theta/2) \tag{1.31}$$

и сопряженного седеона

$$\tilde{\mathbf{U}}^* = \cos(\theta/2) - i\vec{n}\sin(\theta/2). \tag{1.32}$$

Заметим, что справедливо соотношение

$$\tilde{\mathbf{U}}^*\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^* = 1. \tag{1.33}$$

Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ определяется как седеонное произведение следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{V}}' = \tilde{\mathbf{U}}^*\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}. \tag{1.34}$$

Таким образом, трансформированный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}' &= \left[\cos(\theta/2) - i\vec{n}\sin(\theta/2)\right]\left(\mathbf{V_0} + \vec{\mathbf{V}}\right)\left[\cos(\theta/2) + i\vec{n}\sin(\theta/2)\right] \\ &= \mathbf{V_0} + \vec{\mathbf{V}}\cos\theta + (1-\cos\theta)\left(\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right)\vec{n} - i\sin\theta\left[\vec{n}\times\vec{\mathbf{V}}\right].\end{aligned} \tag{1.35}$$

Ясно видно, что преобразование вращения не изменяет седеонно-скалярную часть, в то время как седеонный вектор $\vec{\mathbf{V}}$ поворачивается на угол θ вокруг вектора $\vec{n}$.

Операции временного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{t}})$, пространственного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{r}})$ и пространственно-временного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{tr}})$ связаны с преобразованиями в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_2\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 - \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3, \\ \hat{R}_{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_1\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 - \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3, \\ \hat{R}_{\mathbf{tr}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_3\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3.\end{aligned} \tag{1.36}$$

1.3. Подалгебры меньшей размерности

Седеонный базис $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{a}_\beta$ позволяет конструировать различные типы величин меньшей размерности, которые отличаются своими свойствами по отношению к операциям пространственного и временного сопряжения. Например, можно ввести простарнственно-временные двойные числа вида

$$D_{\mathbf{t}} = d_1 + \mathbf{e}_{\mathbf{t}} d_2 , \tag{1.37}$$

$$D_{\mathbf{r}} = d_1 + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} d_2 , \tag{1.38}$$

$$D_{\mathbf{tr}} = d_1 + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} d_2 , \tag{1.39}$$

где d_1 и d_2 - скалярные величины. Данные величины, с одной стороны, обладают всеми свойствами двойных чисел, а с другой стороны, по-разному преобразуются при пространственно-временном сопряжении и при седеонных преобразованиях Лоренца (раздел 2.1).

Также можно ввести четырехкомпонентные величины, которые мы назовем “кватероны” (в противоположность кватернионам), в соответствии со следующими определениями:

$$\overset{\frown}{Q} = q_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_0 \left(q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + q_3 \mathbf{a}_3 \right), \tag{1.40}$$

$$\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{t}} = q_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{t}} \left(q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + q_3 \mathbf{a}_3 \right), \tag{1.41}$$

$$\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{r}} = q_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \left(q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + q_3 \mathbf{a}_3 \right), \tag{1.42}$$

$$\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{tr}} = q_0 \mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \left(q_1 \mathbf{a}_1 + q_2 \mathbf{a}_2 + q_3 \mathbf{a}_3 \right). \tag{1.43}$$

Абсолютный кватерон (1.40) представляет собой сумму абсолютного скаляра и абсолютного вектора. Он не изменяется под действием операций пространственно-временного сопряжения. Временной кватерон $\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{t}}$, пространственный кватерон $\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{r}}$ и пространственно-временной кватерон $\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{tr}}$ изменяются под действием операций пространственно-временного сопряжения в соответствии с правилами коммутации базисных элементов $\mathbf{e}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}$. Например, операция временного сопряжения (см. (1.36)) кватерона $\overset{\frown}{Q}_{\mathbf{t}}$ сводится к преобразованию следующего вида:

$$\hat{R}_{\mathbf{t}}\breve{Q}_{\mathbf{t}} = \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\breve{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{e}_{\mathbf{r}} = q_0\mathbf{a_0} - \mathbf{e_t}\left(q_1\mathbf{a_1} + q_2\mathbf{a_2} + q_3\mathbf{a_3}\right). \tag{1.41}$$

Кроме того, седеонный базис $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{a}_\beta$ позволяет также конструировать различные типы пространственно-временных восьмикомпонентных величин - октонов [20]:

$$\breve{G}_{\mathbf{t}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_t}G_{10} + \mathbf{e_t}\left(G_{11}\mathbf{a_1} + G_{12}\mathbf{a_2} + G_{13}\mathbf{a_3}\right), \tag{1.42}$$

$$\breve{G}_{\mathbf{r}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_r}G_{20} + \mathbf{e_r}\left(G_{21}\mathbf{a_1} + G_{22}\mathbf{a_2} + G_{23}\mathbf{a_3}\right), \tag{1.43}$$

$$\breve{G}_{\mathbf{tr}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_{tr}}G_{30} + \mathbf{e_{tr}}\left(G_{31}\mathbf{a_1} + G_{32}\mathbf{a_2} + G_{33}\mathbf{a_3}\right). \tag{1.44}$$

Каждая из этих подалгебр является замкнутой (кольцом) по отношению к операции клиффордовского умножения. Применение пространственных октонов (1.43) в электродинамике и релятивистской квантовой механике рассмотрено в работах [20-22].

1.4. Заключение

Алгебра седеонов может рассматриваться как скалярно-векторный вариант алгебры Клиффорда со специфическими правилами умножения и коммутации. Седеонный векторный базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ отвечает за пространственные вращения, в то время как пространственно-временной базис $\mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_{tr}}$ - за преобразования пространственной и временной инверсии. При этом с точки зрения правил умножения и коммутации оба эти базиса эквивалентны.

В противоположность векторной алгебре Гиббса-Хевисайда, правила умножения единичных векторов седеонного векторного базиса содержат мнимую единицу (см. Таблицу 1). Это позволяет реализовать скалярно-векторную алгебру, на которой определено произведение Клиффорда. По-видимому, первым, кто указал на возможность такого произведения единичных векторов, был А. Макфарлейн [23]. Позднее сходные правила умножения для матричного базиса использовали В. Паули [24] и П.Дирак [25] при построении спинорных уравнений квантовой механики.

Глава 2. Релятивистская механика

2.1. Преобразования Лоренца

Релятивистский четырехмерный вектор события может быть представлен в следующей седеонной форме:

$$\tilde{\mathbf{S}} = i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{r} \,, \tag{2.1}$$

где c - скорость света, t - абсолютный скаляр время и $\vec{r} = x\mathbf{a}_1 + y\mathbf{a}_2 + z\mathbf{a}_3$ - абсолютный радиус-вектор. Седеонный квадрат этой величины равен

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}} = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \,, \tag{2.2}$$

является инвариантом преобразований Лоренца и представляет собой интервал события. В рамках седеонной алгебры преобразования величин от одной инерциальной системы координат к другой осуществляются с помощью седеонов

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= \cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \vec{m} \sinh\vartheta, \\ \tilde{\mathbf{L}}^* &= \cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \vec{m} \sinh\vartheta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где $\tanh(2\vartheta) = v/c$; v - скорость равномерного движения системы вдоль абсолютного вектора $\vec{m}$. Заметим, что

$$\tilde{\mathbf{L}}^* \tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{L}}^* = 1 \,. \tag{2.4}$$

Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{S}}'$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}' = \tilde{\mathbf{L}}^* \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{L}} &= \left(\cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \vec{m} \sinh\vartheta\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{r}\right)\left(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \vec{m} \sinh\vartheta\right) \\ &= i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} ct \cosh(2\vartheta) - i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\sinh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{r} \cosh 2\vartheta \\ &\quad - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} ct\, \vec{m} \sinh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Разделяя величины с $\mathbf{e}_{\mathbf{t}}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$, мы получаем хорошо известные выражения для преобразований времени и координат [26]:

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,, \quad y' = y \,, \quad z' = z \,, \tag{2.6}$$

где x - координата вдоль направления вектора $\vec{m}$.

Рассмотрим преобразования Лоренца полного седеона $\tilde{\mathbf{V}}$. Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ записывается как седеонное произведение

$$\tilde{\mathbf{V}}' = \tilde{\mathbf{L}}^{*}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{L}} . \tag{2.7}$$

В развернутой форме:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{V}}' &= \left(\cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right)\left(\mathbf{V}_{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{V}}\right)\left(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right) \\
&= \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\cosh^{2}\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^{2}\vartheta \\
&+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}} - \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\cosh\vartheta\sinh\vartheta + \vec{\mathbf{V}}\cosh^{2}\vartheta \\
&- \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\vec{\mathbf{V}}\vec{m}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^{2}\vartheta + \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\vec{m}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta .
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Переписывая выражение (2.8) с помощью скалярного (1.27) и векторного (1.28) произведений, мы получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{V}}' &= \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\cosh^{2}\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^{2}\vartheta \\
&+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}} - \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\cosh\vartheta\sinh\vartheta + \vec{\mathbf{V}}\cosh^{2}\vartheta \\
&- \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{\mathbf{V}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^{2}\vartheta - 2\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right)\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh^{2}\vartheta \\
&+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right) - \left(\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{m}\right)\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta \\
&+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{\mathbf{V}}\right] - \left[\vec{\mathbf{V}}\times\vec{m}\right]\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta .
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Таким образом, преобразованный седеон имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
& V' = V , \\
& V'_{\mathbf{tr}} = V_{\mathbf{tr}} , \\
& V'_{\mathbf{r}} = V_{\mathbf{r}}\cosh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\sinh(2\vartheta) , \\
& V'_{\mathbf{t}} = V_{\mathbf{t}}\cosh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\sinh(2\vartheta) , \\
& \vec{V}' = \vec{V}\cosh(2\vartheta) - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right) \\
& \qquad + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right]\sinh(2\vartheta) , \\
& \vec{V}'_{\mathbf{tr}} = \vec{V}_{\mathbf{tr}}\cosh(2\vartheta) - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}\right]\sinh\left(2\vartheta\right),$$

$$\vec{V}_{\mathbf{r}}'=\vec{V}_{\mathbf{r}}+\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta-1\right)+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{t}}\vec{m}\sinh\left(2\vartheta\right),$$

$$\vec{V}_{\mathbf{t}}'=\vec{V}_{\mathbf{t}}+\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta-1\right)+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{r}}\vec{m}\sinh\left(2\vartheta\right).$$

2.2. Релятивистский импульс и момент импульса

В релятивистской физике важной величиной является четырехмерный вектор энергии-импульса частицы. В седеонной алгебре он может быть представлен в виде седеона:

$$\tilde{\mathbf{E}}=i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}\,, \qquad (2.11)$$

где E - энергия, а $\vec{p}$ - импульс частицы. Квадрат этой величины

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}\right)=-E^2+c^2\vec{p}^{\,2} \qquad (2.12)$$

является инвариантом преобразований Лоренца и связан с массой частицы m_0 соотношением Эйнштейна:

$$E^2-c^2\vec{p}^{\,2}-m_0^2c^4=0\,. \qquad (2.13)$$

Используя алгебру седеонов, данное выражение можно представить в виде произведения двух сомножителей

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m_0c^2\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m_0c^2\right)=0\,, \qquad (2.14)$$

что в дальнейшем будет использовано нами при конструировании уравнений квантовой механики и теории поля.

Обобщенный момент импульса частицы $\tilde{\mathbf{M}}$ может быть записан следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{M}}=\frac{1}{c}\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{S}}=\frac{1}{c}\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}E+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}c\vec{p}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r}\right). \qquad (2.15)$$

Производя седеонное умножение, мы получаем

$$\tilde{\mathbf{M}}=-Et+\left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right)+\left[\vec{p}\times\vec{r}\right]+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}c\vec{p}t-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\frac{1}{c}E\vec{r}\,. \qquad (2.16)$$

Глава 3. Квантовая механика и теория поля

3.1. Обобщенное седеонное волновое уравнение

Волновая функция свободной релятивистской квантовой частицы должна удовлетворять волновому уравнению, которое получается из соотношения Эйнштейна для энергии и импульса

$$E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4 = 0 \tag{3.1}$$

посредством замены классической энергии E и импульса $\vec{p}$ на соответствующие квантово-механические операторы [27]:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}\,, \tag{3.2}$$

где $\hbar$ - постоянная Планка, а $\vec{\nabla}$ - оператор градиента, который является абсолютным вектором и имеет следующий вид:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{a_1} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a_2} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a_3} \frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{3.3}$$

В седеонной алгебре соотношение Эйнштейна (3.1) для операторов (3.2) может быть представлено следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e_t}\hat{E} + \mathbf{e_r} c\hat{\vec{p}} + \mathbf{e_{tr}} m_0 c^2 \right)\left(i\mathbf{e_t}\hat{E} + \mathbf{e_r} c\hat{\vec{p}} + \mathbf{e_{tr}} m_0 c^2 \right) = 0\,. \tag{3.4}$$

Рассмотрим волновую функцию в виде пространственно-временного седеона

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}\left(\vec{r},t\right) = \boldsymbol{\psi_0}\left(\vec{r},t\right) + \vec{\boldsymbol{\psi}}\left(\vec{r},t\right), \tag{3.5}$$

тогда обобщенное седеонное волновое уравнение, соответствующее операторному уравнению (3.4), может быть записано в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar} \right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar} \right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0\,. \tag{3.6}$$

В этом уравнении m_0 является массой покоя частицы.

Кроме того, существует специальный класс частиц, который описывается волновым уравнением первого порядка [27]:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \tag{3.7}$$

Очевидно, для таких частиц уравнение (3.6) удовлетворяется автоматически.

Седеонное квантовое уравнение (3.6) допускает полевую интерпретацию. Действительно, введем для упрощения выкладок следующие операторы:

$$\begin{aligned}
\partial_\mathbf{t} &= \mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,,\\
\vec{\nabla}_\mathbf{r} &= \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\,,\\
m_\mathbf{tr} &= \mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\,,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

тогда уравнение (3.6) принимает вид

$$\left(i\partial_\mathbf{t}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}-im_\mathbf{tr}\right)\left(i\partial_\mathbf{t}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}-im_\mathbf{tr}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \tag{3.9}$$

Рассмотрим последовательное действие операторов в левой части (3.9). После действия первого оператора получаем

$$\begin{aligned}
\left(i\partial_\mathbf{t}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}-im_\mathbf{tr}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} &= i\partial_\mathbf{t}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}+i\partial_\mathbf{t}\vec{\boldsymbol{\psi}}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}\\
-\left(\vec{\nabla}_\mathbf{r}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right)&-\left[\vec{\nabla}_\mathbf{r}\times\vec{\boldsymbol{\psi}}\right]-im_\mathbf{tr}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}-im_\mathbf{tr}\vec{\boldsymbol{\psi}}\,.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Вводя скалярные и векторные напряженности полей согласно

$$\mathbf{E_0}=i\partial_\mathbf{t}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}-\left(\vec{\nabla}_\mathbf{r}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right)-im_\mathbf{tr}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}\,, \tag{3.11}$$

$$\vec{\mathbf{E}}=i\partial_\mathbf{t}\vec{\boldsymbol{\psi}}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}-\left[\vec{\nabla}_\mathbf{r}\times\vec{\boldsymbol{\psi}}\right]-im_\mathbf{tr}\vec{\boldsymbol{\psi}}\,, \tag{3.12}$$

соотношение (3.10) можно представить в следующем виде:

$$\left(i\partial_\mathbf{t}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}-im_\mathbf{tr}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\mathbf{E_0}+\vec{\mathbf{E}}\,. \tag{3.13}$$

Тогда волновое уравнение (3.9) принимает форму

$$\left(i\partial_\mathbf{t}-\vec{\nabla}_\mathbf{r}-im_\mathbf{tr}\right)\left(\mathbf{E_0}+\vec{\mathbf{E}}\right)=0\,. \tag{3.14}$$

Производя действие оператора в (3.14) и разделяя седеон-скалярную и седеон-векторную части, получаем систему уравнений первого порядка, аналогичную уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} & i\partial_{\mathbf{t}}\mathbf{E_0} - \left(\vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{E}}\right) - im_{\mathbf{tr}}\mathbf{E_0} = 0, \\ & i\partial_{\mathbf{t}}\vec{\mathbf{E}} - \left[\vec{\nabla}_{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{E}}\right] - im_{\mathbf{tr}}\vec{\mathbf{E}} - \vec{\nabla}_{\mathbf{r}}\mathbf{E_0} = 0. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Фактически, волновые уравнения первого и второго порядка описывают квантовые поля, которые несут информацию о кинематических свойствах квантовых частиц. Дисперсионные характеристики этих волновых полей совпадают с соотношением Эйнштейна для энергии и импульса частицы. При этом уравнение первого порядка (3.7) описывает специальный случай квантовых полей с интенсивностями $\mathbf{E_0}$ и $\vec{\mathbf{E}}$ равными нулю. Более подробно квантовая механика релятивистских частиц будет рассмотрена в следующих разделах.

Обобщенное седеонное волновое уравнение (3.6) имеет и другую интерпретацию как волновое уравнение для силовых массивных полей [16]. В этом случае источниками полей являются соответствующие заряды и токи, так что кроме однородного уравнения, описывающего свободные поля, имеет место неоднородное уравнение вида

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}}, \tag{3.16}$$

где посредством $\tilde{\mathbf{J}}$ обозначен феноменологический скалярно-векторный источник поля. В этом случае волновая функция $\tilde{\mathbf{W}}$ имеет смысл потенциала поля, а параметр m_0 - массы кванта поля. Разумеется, что в случае массы кванта равной нулю, уравнение (3.16) должно описывать электромагнитные и слабые гравитационные поля. Седеонная теория массивных и безмассовых силовых полей будет рассмотрена подробно в последующих разделах.

Глава 4. Электромагнитное поле

4.1. Седеонная форма уравнений электродинамики

Седеонное волновое уравнение для электромагнитного поля в вакууме записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} \right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} \right)\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}} . \tag{4.1}$$

Потенциал электромагнитного поля имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi_e + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}_e , \tag{4.2}$$

где φ_e - скалярный потенциал (временная компонента), $\vec{A}_e$ - векторный потенциал (пространственная компонента). Источник поля $\tilde{\mathbf{J}}$ записывается следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{J}} = -4\pi i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_e - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e \tag{4.3}$$

где ρ_e - объемная плотность электрического заряда, $\vec{j}_e$- объемная плотность электрического тока.

Уравнение (4.1) является компактным универсальным соотношением и может быть представлено либо в виде системы волновых уравнений для потенциалов поля, либо в виде системы уравнений Максвелла для напряженностей поля. Действительно, производя перемножения операторов в уравнении (4.1) и разделяя скалярную временную и векторную пространственную части, мы получаем систему волновых уравнений:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)\varphi_e = 4\pi\rho_e , \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)\vec{A}_e = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e . \tag{4.5}$$

Здесь мы предполагаем, что потенциалы поля описываются дважды дифференцируемыми функциями, так что $\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right]\tilde{\mathbf{W}} = 0$. С другой стороны, выполняя последовательное действие операторов в уравнении (4.1), мы имеем

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e\right)$$
$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]. \tag{4.6}$$

Введем скалярные и векторные напряженности электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} f_e &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right), \\ \vec{E}_e &= -\vec{\nabla}\varphi_e-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}, \\ \vec{H}_e &= -i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Тогда выражение (4.6) представляется в виде

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e\right)=-f_e+\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e\,, \tag{4.8}$$

а уравнение (4.1) может быть переписано следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(-f_e+\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e\right)=-\,4\pi i\mathbf{e_t}\rho_e-\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e. \tag{4.9}$$

Применяя оператор

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)$$

к обеим частям уравнения (4.9) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)f_e=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)\right\}, \tag{4.10}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}_e=-4\pi\vec{\nabla}\rho_e-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_e}{\partial t}, \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}_e=-i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_e\right]\quad. \tag{4.12}$$

Если в физической системе выполняется закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e\right) = 0\,, \tag{4.13}$$

то уравнение (4.10) не имеет источников, и можно выбрать скалярное поле f_e равным нулю. Это эквивалентно выполнению условия калибровки Лоренца:

$$f_e = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_e) = 0\ . \tag{4.14}$$

В калибровке Лоренца уравнение (4.9) принимает вид

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e\right) = -\,4\pi i\mathbf{e_t}\rho_e - \mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e. \tag{4.15}$$

Производя действие оператора в левой части (4.15), мы имеем следующее седеонное уравнение:

$$\begin{aligned} &\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_e}{\partial t} - i\mathbf{e_t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_e\right) - i\mathbf{e_t}\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_e\right] \\ &+ \mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t} + i\mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_e\right) + i\mathbf{e_r}\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_e\right] \\ &= -\,4\pi i\mathbf{e_t}\rho_e - \mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\ . \end{aligned} \tag{4.16}$$

Разделяя в (4.16) величины с различными свойствами, мы получаем систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} &-i\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_e\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_e}{\partial t}, \\ &-i\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_e\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_e}{\partial t}, \\ &\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_e\right) = 4\pi\rho_e, \\ &\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_e\right) = 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

которая совпадает с системой уравнений Максвелла.

4.2. Энергия и импульс электромагнитного поля

Седеонная алгебра позволяет проводить комбинированные вычисления одновременно с величинами различного типа. В данном разделе, используя седеонную алгебру, мы получим соотношения для энергии и импульса электромагнитного поля.

Умножая слева обе части уравнения (4.15) на седеон ($\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e$), мы имеем:

$$\begin{aligned}
&-i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e\right)^2+\left(\vec{H}_e\right)^2\right\}-i\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)-i\frac{1}{c}\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{-i\frac{1}{c}\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]-i\frac{1}{c}\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]\right.\\
&\left.+\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\left[\vec{E}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]-\left[\vec{H}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]\right\} \qquad (4.18)\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e\right)^2+\left(\vec{H}_e\right)^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)\vec{E}_e+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)\vec{H}_e\right\}\\
&=i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)+i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)-4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\rho_e\vec{H}_e-i\frac{1}{c}\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]\right\}\\
&+4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{\rho_e\vec{E}_e+i\frac{1}{c}\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]\right\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что в этом выражении и далее оператор $\vec{\nabla}$ действует на все выражение справа. Так, например, для любых двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ мы имеем:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}\,. \qquad (4.19)$$

Разделяя в (4.18) величины различных типов, мы получаем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2\right)-i\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)=0\,, \qquad (4.20)$$

$$\frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2\right)-i\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)\vec{E}_e+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)\vec{H}_e\right\}+\rho_e\vec{E}_e+i\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]=0, \tag{4.21}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)\right\}$$
$$-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}-\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)=0, \tag{4.22}$$

$$-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]\right\}+\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)\right\}$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]-\left[\vec{H}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]\right\}+c\vec{H}_e\rho_e-i\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]=0. \tag{4.23}$$

Выражение (4.20) представляет собой известное соотношение, называемое теоремой Пойнтинга. Величина

$$w=\frac{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2}{8\pi} \tag{4.24}$$

является объемной плотностью энергии электромагнитного поля, а вектор

$$\vec{P}=-i\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right] \tag{4.25}$$

имеет смысл плотности потока энергии поля (вектор Пойнтинга).

4.3. Соотношения для инвариантов электромагнитного поля

Используя седеонную алгебру, нетрудно получить соотношения для величин

$$I_1=\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2,$$
$$I_2=\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right), \tag{4.26}$$

которые являются инвариантами преобразований Лоренца электромагнитного поля. Умножая слева обе части уравнения (4.15) на седеон ($\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e$), мы имеем:

$$-i\mathbf{e_t}\left\{\frac{1}{c}\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)+i\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)+i\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)\right\}$$

$$+i\mathbf{e_r}\left\{\frac{1}{c}\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)-i\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)+i\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}$$

$$+\mathbf{e_t}\left\{-i\frac{1}{c}\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+i\frac{1}{c}\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]\right.$$

$$\left.+\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)+\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\left[\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]+\left[\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]\right\} \tag{4.27}$$

$$+\mathbf{e_r}\left\{i\frac{1}{c}\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]+i\frac{1}{c}\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)\right.$$

$$\left.+\left[\vec{E}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]-\left[\vec{H}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]\right\}$$

$$=i\mathbf{e_t}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)-i\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)+4\pi\mathbf{e_t}\left\{\rho_e\vec{H}_e+i\frac{1}{c}\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]\right\}$$

$$+4\pi\mathbf{e_r}\left\{\rho_e\vec{E}_e-i\frac{1}{c}\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]\right\}.$$

Разделяя величины различных типов, мы получаем следующие соотношения для инвариантов Лоренца электромагнитного поля:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2\right\}$$
$$=-\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)\right\}, \tag{4.28}$$

$$\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2\right\}$$
$$=\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e\right\} \tag{4.29}$$
$$+i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]\right\}-c\rho_e\vec{E}_e+i\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right],$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)\right\}$$
$$=i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}-\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right), \tag{4.30}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)\right\}\\
&=\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)+\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)-\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e+\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e\right\} \qquad (4.31)\\
&-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]\right\}-c\vec{H}_e\rho_e+i\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right].
\end{aligned}
$$

4.4. Суперсимметричная форма уравнений электромагнитного поля

Впервые вопрос о симметрии между электрическими и магнитными зарядами был рассмотрен П.Дираком [28, 29]. С учетом гипотетических магнитных зарядов (магнитных монополей) и соответствующих токов система уравнений Максвелла выглядит абсолютно симметричной [30]. В терминах седеонной алгебры симметричное волновое уравнение для электромагнитного поля можно записать в следующем виде:

$$\left(i\mathbf{e}_1\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_1\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}=\tilde{\mathbf{J}}\ . \qquad (4.32)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{W}}$ - седеонный потенциал имеет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}=\ i\mathbf{e}_1\varphi_e-i\mathbf{e}_2\varphi_m+\mathbf{e}_1\vec{A}_m+\mathbf{e}_2\vec{A}_e\,, \qquad (4.33)$$

где φ_e - электрический скалярный потенциал, φ_m - магнитный скалярный потенциал, $\vec{A}_e$ - электрический векторный потенциал, $\vec{A}_m$ - магнитный векторный потенциал. Седеонный источник

$$\tilde{\mathbf{J}}=-i\mathbf{e}_1 4\pi\rho_e-\mathbf{e}_2\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e+i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_m-\mathbf{e}_1\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,, \qquad (4.34)$$

где ρ_m - объемная плотность магнитного заряда, $\vec{j}_m$ - плотность магнитного тока.

Уравнение (4.32) эквивалентно восьми скалярным уравнениям для компонент потенциалов. Разделяя в (4.32) пространственно-временные и скалярно-векторные части получаем волновые уравнения для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_e = 4\pi\rho_e\,, \tag{4.35}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_e = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\,, \tag{4.36}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_m = 4\pi\rho_m\,, \tag{4.37}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_m = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,. \tag{4.38}$$

Вводя скалярные и векторные напряженности поля, согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right),\\
h &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_m}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_m\right),\\
\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi_e + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_m\right],\\
\vec{H} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_m}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi_m - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right],
\end{aligned} \tag{4.39}$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_1}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_2}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_1}\varphi_e - i\mathbf{e_2}\varphi_m + \mathbf{e_1}\vec{A}_m + \mathbf{e_2}\vec{A}_e\right)\\
&= -e + i\mathbf{e_3}h - i\vec{H} + \mathbf{e_3}\vec{E},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

и волновое уравнение (4.32) сводится к

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_1}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_2}\vec{\nabla}\right)\left(-e + i\mathbf{e_3}h - i\vec{H} + \mathbf{e_3}\vec{E}\right)\\
&= -i\mathbf{e_1}4\pi\rho_e - \mathbf{e_2}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e + i\mathbf{e_2}4\pi\rho_m - \mathbf{e_1}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем систему уравнений для полей, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\rho_e,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=4\pi\rho_m,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}e+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}+\vec{\nabla}h-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m.
\end{aligned}\tag{4.42}$$

Уравнения (4.42) представляют собой замкнутую систему восьми скалярных уравнений для восьми компонент электромагнитного поля.

Скалярные и векторные напряженности поля (4.39) и уравнения (4.42) обладают калибровочной инвариантностью по отношению к градиентным преобразованиям следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\varphi_e\Rightarrow\varphi_e+\frac{\partial\varepsilon_e}{\partial t},\\
&\vec{A}_e\Rightarrow\vec{A}_e+\vec{\nabla}\varepsilon_e,\\
&\varphi_m\Rightarrow\varphi_m+\frac{\partial\varepsilon_m}{\partial t},\\
&\vec{A}_m\Rightarrow\vec{A}_m+\vec{\nabla}\varepsilon_m,
\end{aligned}\tag{4.43}$$

где ε_e и ε_m - произвольные скалярные функции координат и времени, удовлетворяющие однородному волновому уравнению. Действительно нетрудно проверить, что преобразования (4.43) не изменяют напряженности полей (4.39), а, следовательно, и уравнений (4.42).

Применяя оператор

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)$$

к обеим частям уравнения (4.41) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)e=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)\right\}, \tag{4.44}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)h=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m\right)\right\}, \tag{4.45}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}=-4\pi\vec{\nabla}\rho_e-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_e}{\partial t}+i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_m\right], \tag{4.46}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}=-4\pi\vec{\nabla}\rho_m-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_m}{\partial t}-i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_e\right]. \tag{4.47}$$

Если в физической системе выполняются законы сохранения электрического и магнитного зарядов

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)=0, \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m\right)=0, \tag{4.49}$$

то уравнения (4.44) и (4.45) не имеют источников, и можно выбрать скалярные поля e и h равными нулю. Это эквивалентно выполнению условий калибровки Лоренца для электрического и магнитного потенциалов:

$$e=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e)=0, \tag{4.50}$$

$$h=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_m)=0. \tag{4.51}$$

В калибровке Лоренца уравнения Максвелла (4.42) записываются следующим образом:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\rho_e, \tag{4.52}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e, \tag{4.53}$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=4\pi\rho_m, \tag{4.54}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,. \tag{4.55}$$

Поскольку экспериментально установлено, что в нашей части вселенной магнитные заряды и токи не наблюдаются, то для описания явлений в земных условиях необходимо положить

$$\begin{aligned} &\rho_m = 0, \\ &\vec{j}_m = 0. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Это приводит к тому, что уравнения (4.37) и (4.38) не имеют источников, и можно выбрать магнитные потенциалы φ_m и $\vec{A}_m$ равными нулю. Кроме того, зануляются источники в правых частях уравнений (4.54) и (4.55). Таким образом, в частном случае отсутствия магнитных зарядов и выполнения закона сохранения электрического заряда мы приходим к стандартной системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 4\pi\rho_e, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e, \\ &\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) = 0, \\ &\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = 0. \end{aligned} \tag{4.57}$$

Глава 5. Гравитационное поле

Аналогия между электромагнитным и гравитационным полем обсуждается на протяжении долгих лет, начиная с Д.Максвелла и О.Хевисайда [31,32]. Данная аналогия стимулировала многие попытки обобщить теорию тяготения И.Нютона и представить уравнения гравитационного поля в виде уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла. В основе данного подхода лежат два предположения. Первое является гипотезой существования гравитомагнитного поля, обусловленного движущимися массами. Второе предположение - гипотеза о том, что гравитационное взаимодействие распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Эти два предположения позволяют построить феноменологические уравнения для гравитационного поля, аналогичные уравнениям Максвелла [33, 34]. С другой стороны, недавно было показано, что линеаризация уравнений общей теории относительности вблизи плоской метрики Минковского также приводит к уравнениям Максвелла для слабых гравитационных полей.

Применение гиперкомплексных чисел в теории слабого гравитационного поля рассмотрено в работах [35,36].

5.1. Линейные уравнения гравитационного поля в плоском пространстве-времени

Как известно, уравнение Эйнштейна, описывающее гравитационное поле, записывается в следующем виде [26]:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} , \tag{5.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ - метрический тензор, $R_{\alpha\beta}$ - тензор Риччи, G - гравитационная постоянная, $T_{\alpha\beta}$ - тензор энергии-импульса материи. Для слабого поля в линейном приближении это уравнение можно представить [37-39] в следующей форме:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\overline{h}_{\alpha\beta}=-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}\ , \tag{5.2}$$

где $\overline{h}_{\alpha\beta}$ - отклонение от метрического тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, определяемое следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= \eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}, \\ \overline{h}_{\alpha\beta} &= h_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h, \\ h &\equiv \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Отклонение $\overline{h}_{\alpha\beta}$ ($\left|\overline{h}_{\alpha\beta}\right| << 1$) удовлетворяет условию калибровки $\partial\overline{h}_{\alpha\beta}/\partial x_\beta=0$. Вводя плотность вещества ρ_G и плотность тока вещества $\vec{j}_G$, следуя соотношениям

$$T_{00}=\rho_G c^2\ , \tag{5.4}$$

$$T_{0n}=j_{Gn}c\ , \tag{5.5}$$

а так же скалярный и векторный потенциалы согласно

$$\overline{h}_{00}=\frac{4}{c^2}\varphi_G\ , \tag{5.6}$$

$$\overline{h}_{0n}=\frac{4}{c^2}A_{Gn}\ , \tag{5.7}$$

уравнение (5.2) может быть представлено как система волновых уравнений для потенциалов поля:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_G=-4\pi G\rho_G\ , \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_G=-\frac{4\pi}{c}G\,\vec{j}_G\ , \tag{5.9}$$

с калибровочным условием

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_G}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_G\right)=0\ . \tag{5.10}$$

Аналогия с электродинамикой вполне очевидна. Можно определить напряженности гравитационного поля:

$$\vec{E}_G = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi_G , \tag{5.11}$$

$$\vec{H}_G = \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_G\right]. \tag{5.12}$$

Для этих величин справедливы уравнения, аналогичные уравнениям Максвелла. В векторной алгебре Хевисайда-Гиббса эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G\right) = -4\pi G \rho_G ,\\ \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_G\right) = 0,\\ \left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_G\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_G}{\partial t},\\ \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_G\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_G .\end{gathered} \tag{5.13}$$

Эти же уравнения можно записать в алгебре седеонов. В этом случае поля определяются как

$$\vec{E}_G = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi_G , \tag{5.14}$$

$$\vec{H}_G = -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_G\right]. \tag{5.15}$$

Тогда уравнения для гравитационного поля записываются в следующей седеонной форме:

$$\begin{gathered}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G\right) = -4\pi G \rho_G ,\\ \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_G\right) = 0,\\ -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}_G\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}_G}{\partial t},\\ -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_G\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_G .\end{gathered} \tag{5.16}$$

Уравнения гравитационного поля отличаются от уравнений для электромагнитного поля (4.17) знаком перед членами, описывающими источники поля.

Глава 6. Гравитоэлектромагнетизм

В настоящем разделе мы развиваем седеонный подход к проблеме формулировки уравнений обобщенного безмассового гравито-электромагнитного поля, описывающего одновременно электромагнетизм и слабую гравитацию [18].

6.1. Обобщенный закон Ньютона - Кулона

Известно, что сила кулоновского взаимодействия между двумя точечными электрически заряженными телами равна

$$\vec{F}_{e12} = \frac{q_{e1} q_{e2}}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} , \tag{6.1}$$

где q_{e1} и q_{e2} - электрические заряды; $\vec{r}_{12}$ - вектор направленный от тела 1 к телу 2; r_{12} - расстояние между точечными телами, которое равно модулю вектора $\vec{r}_{12}$. Для симметричного описания электрического и гравитационного взаимодействий введем гравитационный заряд q_g , рассмотренный ранее в работах [33, 40]:

$$q_g = \sqrt{G} m , \tag{6.2}$$

где G – гравитационная постоянная, m - масса гравитирующего тела. Тогда соотношение Ньютона для силы гравитационного взаимодействия между двумя точечными телами может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{F}_{g12} = -\frac{q_{g1} q_{g2}}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} . \tag{6.3}$$

Совместное рассмотрение гравитационного и электрического поля приводит к еще одной симметрии, связанной с зарядовым сопряжением. С алгебраической точки зрения, данную симметрию можно учесть, вводя дополнительные скалярные единицы, ассоциируемые с электрическим и гравитационным зарядом. Обозначим электрическую единицу символом $\boldsymbol{\varepsilon}_e$. Данная величина меняет знак при электрическом зарядовом сопряжении.

Гравитационная единица $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ меняет знак при гравитационном зарядовом сопряжении. Поскольку в классической физике нет прямого взаимодействия между гравитационным и электрическим зарядами, то правила умножения единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ должны быть выбраны в соответствии с Таблицей 3.

Таблица 3. Правила умножения единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$.

	$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	$\boldsymbol{\varepsilon}_g$
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	1	0
$\boldsymbol{\varepsilon}_g$	0	1

Мы также будем предполагать антикоммутативность данных единиц:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e\boldsymbol{\varepsilon}_g = -\boldsymbol{\varepsilon}_g\boldsymbol{\varepsilon}_e, \tag{6.4}$$

считая при этом, что приоритет операции коммутации выше приоритета операции умножения, так что

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e\boldsymbol{\varepsilon}_g\boldsymbol{\varepsilon}_e = -\boldsymbol{\varepsilon}_g\boldsymbol{\varepsilon}_e\boldsymbol{\varepsilon}_e = -\boldsymbol{\varepsilon}_g\,. \tag{6.5}$$

Следуя этому подходу, можно ввести обобщенный гравитоэлектрический заряд

$$Q = \boldsymbol{\varepsilon}_e q_e - i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g\,. \tag{6.6}$$

Тогда обобщенный закон Ньютона-Кулона может быть записан в следующем виде:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\,. \tag{6.7}$$

Действительно, обобщенный закон (6.7) дает нам правильное выражение для силы взаимодействия между двумя точечными массивными электрически заряженными телами:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_{e1}q_{e2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} - \frac{q_{g1}q_{g2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}\,. \tag{6.8}$$

Основываясь на алгебре гравитоэлектрических единиц, операции электрического зарядового сопряжения ($\hat{I}_e$), гравитационного зарядового сопряжения ($\hat{I}_g$) и электрогравитационного зарядового сопряжения ($\hat{I}_{eg}$) могут быть введены следующим образом:

$$\hat{I}_e Q = \boldsymbol{\varepsilon}_g Q \boldsymbol{\varepsilon}_g = -\boldsymbol{\varepsilon}_e q_e - i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g , \tag{6.9}$$

$$\hat{I}_g Q = \boldsymbol{\varepsilon}_e Q \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e q_e + i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g , \tag{6.10}$$

$$\hat{I}_{eg} Q = \boldsymbol{\varepsilon}_g \boldsymbol{\varepsilon}_e Q \boldsymbol{\varepsilon}_e \boldsymbol{\varepsilon}_g = -\boldsymbol{\varepsilon}_e q_e + i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g . \tag{6.11}$$

6.2. Обобщенное уравнение для гравитоэлектромагнитного поля

Седеонный подход позволяет представить гравитационное поле и электромагнитное поле как компоненты единого гравитоэлектромагнитного поля. Рассмотрим потенциал гравитоэлектромагнитного поля в виде

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_t \boldsymbol{\varepsilon}_e \varphi_e + \mathbf{e}_r \boldsymbol{\varepsilon}_e \vec{A}_e + i\left(i\mathbf{e}_t \boldsymbol{\varepsilon}_g \varphi_g + \mathbf{e}_r \boldsymbol{\varepsilon}_g \vec{A}_g \right), \tag{6.12}$$

где $\varphi_e, \vec{A}_e, \varphi_g, \vec{A}_g$ - скалярные и векторные потенциалы электромагнитного (индекс *e*) и гравитационного (индекс *g*) полей. Здесь и далее мы будем подразумевать, что электрические величины содержат электрическую единицу $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, а гравитационные величины содержат $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, однако для упрощения записей мы будем опускать их во всех получаемых выражениях, различая величины по индексу.

Обобщенное седеонное уравнение гравитоэлектромагнитного поля записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_t \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_r \vec{\nabla} \right)\left(i\mathbf{e}_t \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_r \vec{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}} . \tag{6.13}$$

Источник поля имеет вид

$$\tilde{\mathbf{J}} = -4\pi \left(i\mathbf{e}_t \rho_e + \mathbf{e}_r \frac{1}{c}\vec{j}_e \right) + 4\pi i \left(i\mathbf{e}_t \rho_g + \mathbf{e}_r \frac{1}{c}\vec{j}_g \right), \tag{6.14}$$

где ρ_e - объемная плотность электрического заряда, $\vec{j}_e$ - объемная плотность электрического тока, ρ_g - объемная плотность гравитационного заряда, $\vec{j}_g$ - объемная плотность гравитационного тока. В развернутом виде уравнение (6.13) записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e_t}\varphi_g+\mathbf{e_r}\vec{A}_g\right)\right)$$
$$=-4\pi\left(i\mathbf{e_t}\rho_e+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right)+4\pi i\left(i\mathbf{e_t}\rho_g+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right). \tag{6.15}$$

Это уравнение одновременно описывает электромагнитные и гравитационные поля. Так, перемножая операторы в левой части уравнения (6.15) и разделяя величины с различными пространственно-временными и зарядовыми (с различными единицами $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{g}$) свойствами, мы получаем систему волновых уравнений для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_e=4\pi\rho_e\,, \tag{6.16}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_e=4\pi\frac{1}{c}\vec{j}_e\,, \tag{6.17}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_g=-4\pi\rho_g\,, \tag{6.18}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_g=-4\pi\frac{1}{c}\vec{j}_g\,. \tag{6.19}$$

С другой стороны, уравнение (6.15) может быть представлено в виде системы уравнений первого порядка для напряженностей поля. Рассмотрим последовательное действие операторов в уравнении (6.15). После действия первого оператора мы получаем:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e_t}\varphi_g+\mathbf{e_r}\vec{A}_g\right)\right)=$$
$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right] \tag{6.20}$$
$$+i\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi_g-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right\}.$$

Это выражение позволяет ввести скалярные и векторные напряженности полей согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
& f_e = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_e}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right), \\
& \vec{E}_e = -\vec{\nabla}\varphi_e - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_e}{\partial t}, \\
& \vec{H}_e = -i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right], \\
& f_g = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_g}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right), \\
& \vec{E}_g = -\vec{\nabla}\varphi_g - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_g}{\partial t}, \\
& \vec{H}_g = -i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right].
\end{aligned}
\qquad (6.21)
$$

Используя определения (6.21), выражение (6.20) может быть переписано в виде

$$
\begin{aligned}
& \left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi_e + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}_e + i\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi_g + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}_g\right)\right) \\
& = -f_e + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(-f_g + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right).
\end{aligned}
\qquad (6.22)
$$

Тогда обобщенное волновое уравнение (6.15) может быть представлено в следующей форме:

$$
\begin{aligned}
& \left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(-f_e + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(-f_g + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right) \\
& = -4\pi\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_e + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right) + 4\pi i\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_g + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right).
\end{aligned}
\qquad (6.23)
$$

Применяя оператор $\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)$ к обеим частям уравнения (6.23), получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) f_e = \frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)\right\}, \qquad (6.24)
$$

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{E}_e = -4\pi\vec{\nabla}\rho_e - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \vec{j}_e}{\partial t}, \qquad (6.25)
$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}_e=-i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_e\right], \tag{6.26}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)f_g=-\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_g\right)\right\}, \tag{6.27}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}_g=4\pi\vec{\nabla}\rho_g+\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_g}{\partial t}, \tag{6.28}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}_g=i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_g\right]. \tag{6.29}$$

Подразумевая сохранение электрического и гравитационного зарядов

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)=0, \tag{6.30}$$

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_g\right)=0, \tag{6.31}$$

мы можем принять скалярные поля f_e и f_g равными нулю. Это эквивалентно следующим условиям калибровки Лоренца (см. выражения (6.21)):

$$f_e=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e)=0, \tag{6.32}$$

$$f_g=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g)=0. \tag{6.33}$$

В случае калибровки Лоренца выражение (6.22) заменяется на

$$\begin{aligned}&\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e_t}\varphi_g+\mathbf{e_r}\vec{A}_g\right)\right)\\&=\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right),\end{aligned} \tag{6.34}$$

и обобщенное уравнение (6.15) принимает вид

$$\begin{aligned}&\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right)\right)\\&=-4\pi\left(i\mathbf{e_t}\rho_e+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right)+4\pi i\left(i\mathbf{e_t}\rho_g+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right).\end{aligned} \tag{6.35}$$

Производя седеонное умножение в левой части уравнения (6.35) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем систему уравнений Максвелла для гравитоэлектромагнитного поля:

$$
\begin{aligned}
&-i\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right),\\
&-i\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right),\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)=4\pi\left(\rho_e-i\rho_g\right),\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)=0.
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

После разделения величин с различными зарядовыми свойствами (с различными $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{g}$) получаются две отдельные системы уравнений для электромагнитного и гравитационного полей. Для электромагнитного поля имеем

$$
\begin{aligned}
&-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t},\\
&-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t},\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)=4\pi\rho_e,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)=0.
\end{aligned}
\tag{6.37}
$$

С другой стороны, для гравитационного поля получаем

$$
\begin{aligned}
&-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t},\\
&-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_g+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t},\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)=-4\pi\rho_g,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)=0.
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

Таким образом, мы показали, что обобщенное уравнение (6.15) корректно описывает объединенное гравитоэлектромагнитное поле.

6.3. Энергия и импульс гравитоэлектромагнитного поля

Седеонная алгебра позволяет производить комбинированные вычисления одновременно с электромагнитным и гравитационным полями. Умножая уравнение (6.35) на седеон $\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)$ слева, мы имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right)\\ &= -4\pi\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_e + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_e - i\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_g + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right)\right).\end{aligned} \tag{6.39}$$

Производя седеонное умножение в (6.39), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}&-i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)^2 + \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)^2\right\} - i\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right) - i\frac{1}{c}\left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)\right.\\
&\left.+\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right) + \left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{-i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right] - i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right.\\
&+\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right) - \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right)\\
&\left.+\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right] - \left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\}\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right] - \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)^2 + \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)^2\right\}\right.\\
&\left.+\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right)\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right) + \left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right)\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right\}\\
&= i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right) + i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right)\\
&-4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\left(\rho_e - i\rho_g\right)\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right) - i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right]\right\}\\
&+4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{\left(\rho_e - i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right) + i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{6.40}$$

Заметим, что в данном выражении и далее оператор $\vec{\nabla}$ действует на все выражение справа. Например, для любых векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ справедливо следующее соотношение:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}\,. \tag{6.41}$$

Разделяя в (6.40) компоненты с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующие выражения для гравитоэлектромагнитного поля:

$$\begin{gathered}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)^2+\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)^2\right\}-i\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)\\+\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right)=0,\end{gathered} \tag{6.42}$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)-\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)\right\}\\-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)+\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}\\-\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right)=0,\end{gathered} \tag{6.43}$$

$$\begin{gathered}-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]+\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right\}\\+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)-\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)\right\}\\+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]-\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\}\\+c\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\left(\rho_e-i\rho_g\right)-i\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]=0,\end{gathered} \tag{6.44}$$

$$\begin{gathered}-i\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]+\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)^2+\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)^2\right\}\\-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)+\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right\}\\+c\left(\rho_e-i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)-i\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]=0.\end{gathered} \tag{6.45}$$

Наконец, разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varepsilon}_e \boldsymbol{\varepsilon}_g = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}\\
&-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right)\right\}\\
&+\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{j}_g\right)\right\}=0,
\end{aligned}\tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}\\
&-i\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right\}\\
&-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)\vec{E}_e+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)\vec{H}_e\right\}\\
&+\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)\vec{E}_g+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)\vec{H}_g\right\}\\
&+\left\{\rho_e\vec{E}_e+\rho_g\vec{E}_g\right\}+i\left\{\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]+\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0,
\end{aligned}\tag{6.47}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)\right\}\\
&+\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{H}_g\cdot\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right)-\left(\vec{E}_g\cdot\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right)\right\}\\
&-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}\\
&+i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)\right\}\\
&-\left\{\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\vec{j}_g\right)\right\}=0,
\end{aligned}\tag{6.48}$$

$$
\begin{aligned}
&-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]\right\}\\
&+\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)\right\}\\
&+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]-\left[\vec{H}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]\right\}\\
&+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{H}_g\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right]-\left[\vec{E}_g\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right]\right\}\\
&+c\left\{\vec{H}_e\rho_e+\vec{H}_g\rho_g\right\}-i\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]+\left[\vec{E}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0.
\end{aligned}
\tag{6.49}
$$

Выражение (6.46) является обобщенной теоремой Пойнтинга для гравитоэлектромагнитного поля. Величина w

$$
w=\frac{1}{8\pi}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}
\tag{6.50}
$$

представляет собой объемную плотность энергии, в то время как вектор $\vec{P}$

$$
\vec{P}=-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right\}
\tag{6.51}
$$

играет роль вектора Пойнтинга гравитоэлектромагнитного поля. Кроме того, вектор

$$
\vec{f}_L=\rho_e\vec{E}_e+i\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]+\rho_g\vec{E}_g+i\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right]
$$

представляет собой объемную плотность обобщенной силы Лоренца.

6.4. Инварианты Лоренца гравитоэлектромагнитного поля

Седеонная алгебра позволяет получить соотношения для инвариантов Лоренца гравитоэлектромагнитного поля. Для этого умножим уравнение (6.35) слева на седеон

$$
\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right).
$$

В результате получим следующее соотношение:

$$\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_r\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right)\right)$$
$$=-4\pi\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_e+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_e-i\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho_g+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right)\right). \tag{6.52}$$

Выполняя седеонное умножение, имеем

$$-i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\frac{1}{c}\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.+i\left\{\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)+\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)\right\}\right\}$$
$$+i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\left\{\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)+\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)\right.$$
$$\left.-i\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)+i\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}$$
$$+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{-i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]+i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right.$$
$$+\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)+\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)$$
$$\left.+\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]+\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\} \tag{6.53}$$
$$+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]+i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]\right.$$
$$+\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)-\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)$$
$$\left.+\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]-\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]\right\}$$
$$=i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right)-i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right)$$
$$+4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\left(\rho_e-i\rho_g\right)\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)+i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]\right\}$$
$$+4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{\left(\rho_e-i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)-i\frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]\right\}.$$

Разделяя в (6.53) компоненты с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующие соотношения для напряженностей гравитоэлектромагнитного поля:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right) - \left(\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)\right\} \\
+i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right) + \left(\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right)\right\} \\
+\left(\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{6.54}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right) + \left(\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right) - \right. \\
\left. -i\left(\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right) + i\left(\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\} \\
+\left(\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right) = 0,
\end{gathered}
\tag{6.55}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right] + \left[\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\} \\
+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right) + \left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right)\right\} \\
-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right] - \left[\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right\} \\
-c\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\left(\rho_e - i\rho_g\right) - i\left[\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right] = 0,
\end{gathered}
\tag{6.56}
$$

$$
\begin{gathered}
i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right] + \left[\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]\right\} \\
+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right) - \left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right)\right\} \\
+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right] - \left[\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right]\right\} \\
-c\left(\rho_e - i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e - i\vec{E}_g\right) - i\left[\left(\vec{H}_e - i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right] = 0.
\end{gathered}
\tag{6.57}
$$

Наконец, принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{e}\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{g} = 0$, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}_e^2 - \vec{H}_e^2 + \vec{E}_g^2 - \vec{H}_g^2\right\} \\
&+i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)\right\} \\
&+i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)\right\} \\
&+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)-\left(\vec{E}_g\cdot\vec{j}_g\right)=0,
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}_e^2 - \vec{H}_e^2 + \vec{E}_g^2 - \vec{H}_g^2\right\} \\
&-i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]\right\} \\
&-\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e+\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_g\right. \\
&\left.-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e-\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_g\right\} \\
&+c\left\{\rho_e\vec{E}_e-\rho_g\vec{E}_g\right\}-i\left\{\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]-\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0,
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{H}_g\right)\right\} \\
&-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\} \\
&-i\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)\right\} \\
&+\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\vec{j}_g\right)=0,
\end{aligned} \tag{6.60}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{H}_g\right)\right\} \\
&-\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)+\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)+\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)\right. \\
&\left.-\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_g+\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e+\left(\vec{H}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_g\right\} \\
&+i\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]\right\} \\
&+c\left\{\vec{H}_e\rho_e-\vec{H}_g\rho_g\right\}-i\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0.
\end{aligned} \tag{6.61}$$

Выражения (6.58) - (6.61) являются уравнениями для обобщенных инвариантов Лоренца I_1 и I_2:

$$I_1 = \vec{E}_e^2 - \vec{H}_e^2 + \vec{E}_g^2 - \vec{H}_g^2\,, \tag{6.62}$$

$$I_2 = \left(\vec{E}_e \cdot \vec{H}_e\right) + \left(\vec{E}_g \cdot \vec{H}_g\right). \tag{6.63}$$

Глава 7. Релятивистская квантовая механика

7.1. Седеонное волновое уравнение для частиц во внешних полях

Рассмотрим релятивистскую квантовую частицу, которая описывается седеонным волновым уравнением (см. (3.6)):

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,, \tag{7.1}$$

где волновая функция представляет собой пространственно-временной седеон:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}\left(\vec{r},t\right)=\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{0}}\left(\vec{r},t\right)+\vec{\boldsymbol{\psi}}\left(\vec{r},t\right). \tag{7.2}$$

В уравнении (7.1) элементы седеонного базиса $\mathbf{e_n}$ и $\mathbf{a_m}$ выполняют роль пространственно-временных операторов, которые изменяют пространственно-временную структуру седеонной волновой функции $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ посредством перестановки ее компонент. Рассмотрим, например, действие оператора $\mathbf{a_3}$. Для этого запишем волновую функцию в базисе $\mathbf{a_m}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}_0+\boldsymbol{\psi}_1\mathbf{a}_1+\boldsymbol{\psi}_2\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_3\mathbf{a}_3\,, \tag{7.3}$$

тогда действие оператора $\mathbf{a_3}$ сводится к следующему:

$$\mathbf{a}_3\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}_3-i\boldsymbol{\psi}_2\mathbf{a}_1+i\boldsymbol{\psi}_1\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_0\mathbf{a}_3\,. \tag{7.4}$$

Найдем собственные функции оператора $\mathbf{a_3}$. Для этого решим уравнение на собственные функции и собственные значения:

$$\mathbf{a}_3\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\lambda\tilde{\boldsymbol{\psi}}\,.$$

В развернутом виде получаем:

$$\boldsymbol{\psi}_3-i\boldsymbol{\psi}_2\mathbf{a}_1+i\boldsymbol{\psi}_1\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_0\mathbf{a}_3=\lambda(\boldsymbol{\psi}_0+\boldsymbol{\psi}_1\mathbf{a}_1+\boldsymbol{\psi}_2\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_3\mathbf{a}_3)\,. \tag{7.5}$$

Отсюда имеем систему уравнений

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\psi}_3 &= \lambda \boldsymbol{\psi}_0, \\
-i\boldsymbol{\psi}_2 &= \lambda \boldsymbol{\psi}_1, \\
i\boldsymbol{\psi}_1 &= \lambda \boldsymbol{\psi}_2, \\
\boldsymbol{\psi}_0 &= \lambda \boldsymbol{\psi}_3,
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

из которой следует

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 = 1, \\
&\boldsymbol{\psi}_0 = \lambda \boldsymbol{\psi}_3, \\
&\boldsymbol{\psi}_2 = i\lambda \boldsymbol{\psi}_1.
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

Таким образом, собственные значения оператора $\mathbf{a}_3$ равны $\lambda = \pm 1$, и собственные функции оператора $\mathbf{a}_3$ можно записать в следующей форме:

$$
\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \left(1 + \lambda \mathbf{a}_3\right) \boldsymbol{\psi}_0 + \left(\mathbf{a}_1 + \lambda i \mathbf{a}_2\right) \boldsymbol{\psi}_1 , \tag{7.8}
$$

где $\boldsymbol{\psi}_0$ и $\boldsymbol{\psi}_1$ произвольные седеон-скаляры. За элементарные собственные функции можно выбрать следующие комбинации элементов седеонного базиса:

$$
\begin{aligned}
&\left(1 + \lambda \mathbf{a}_3\right), \\
&\left(\mathbf{a}_1 + \lambda i \mathbf{a}_2\right).
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

Для описания частицы во внешнем гравитоэлектромагнитном поле должна быть произведена следующая замена квантовомеханических операторов:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left(q_e \varphi_e - q_g \varphi_g\right), \\
&\vec{\nabla} \to \vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\left(q_e \vec{A}_e - q_g \vec{A}_g\right).
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Таким образом, мы приходим к следующему волновому уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\left\{ i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left(q_e \varphi_e - q_g \varphi_g\right)\right) - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\left(q_e \vec{A}_e - q_g \vec{A}_g\right)\right) - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \frac{m_0 c}{\hbar} \right\} \\
&\times \left\{ i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left(q_e \varphi_e - q_g \varphi_g\right)\right) - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \left(\vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\left(q_e \vec{A}_e - q_g \vec{A}_g\right)\right) - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \frac{m_0 c}{\hbar} \right\} \tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

В следующем разделе мы рассмотрим для примера задачу о релятивистской частице во внешнем однородном магнитном поле.

7.2. Релятивистская частица в однородном магнитном поле

Рассмотрим релятивистскую частицу с электрическим зарядом q_e во внешнем однородном магнитном поле. Пусть вектор напряженности магнитного поля направлен вдоль оси Z:

$$\vec{H}_e = H_e \mathbf{a_3} . \qquad (7.12)$$

Здесь H_e - модуль вектора $\vec{H}_e$. Выберем векторный потенциал в калибровке $\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_e\right) = 0$ в представлении Ландау:

$$\vec{A}_e = A_{e2}\mathbf{a_2} = H_e x \mathbf{a_2} . \qquad (7.13)$$

Тогда седеонное уравнение для релятивистской частицы (7.11) запишется следующим образом:

$$\left\{ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{2i}{\hbar c} q_e H_e x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{q_e^{\,2} H_e^{\,2}}{\hbar^2 c^2} x^2 - \frac{q_e \vec{H}_e}{\hbar c} \right\} \tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0 . \qquad (7.14)$$

В уравнении (7.14) последнее слагаемое $q_e \vec{H}_e / \hbar c$ представляет собой векторный оператор, действие которого сводится к преобразованию седеонного базиса волновой функции. Для стационарных состояний с энергией E получаем:

$$\left[-\Delta + \frac{2i}{\hbar c} q_e H_e x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \frac{q_e^{\,2} H_e^{\,2}}{\hbar^2 c^2} x^2 - \frac{q_e H_e}{\hbar c} \mathbf{a_3} \right] \tilde{\boldsymbol{\psi}} = \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \tilde{\boldsymbol{\psi}} . \qquad (7.15)$$

Данное уравнение можно рассматривать как уравнение на собственные значения и собственные функции оператора, стоящего в левой части. Поскольку данный оператор коммутирует с операторами $\hat{p}_y$ и $\hat{p}_z$, то он имеет общую с ними систему собственных функций. Поэтому будем искать решение уравнения (7.15) в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x) \exp\left\{ \frac{i}{\hbar}\left(p_y y + p_z z \right) \right\} , \qquad (7.16)$$

где p_y и p_z являются интегралами движения, а $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x)$ - произвольная седеонная функция. Подставляя (7.16) в (7.15), получаем

$$\left[\frac{p_y^2}{\hbar^2}+\frac{p_z^2}{\hbar^2}+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2p_y}{\hbar^2 c}q_eH_ex+\frac{q_e{}^2H_e{}^2}{\hbar^2c^2}x^2-\frac{q_eH_e}{\hbar c}\mathbf{a_3}\right]\tilde{\boldsymbol{\varphi}}=\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\,. \qquad (7.17)$$

Заметим, что оператор в левой части уравнения (7.17) коммутирует с оператором $\mathbf{a_3}$, поэтому будем искать решение уравнения (7.17) в виде линейной комбинации собственных функций оператора $\mathbf{a_3}$ (см. (7.9)):

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}=\left(1+\lambda\mathbf{a_3}\right)\mathbf{F}_1^{(\lambda)}(x)+\left(\mathbf{a_1}+\lambda i\mathbf{a_2}\right)\mathbf{F}_2^{(\lambda)}(x)\,, \qquad (7.18)$$

где $\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}(x)$ ($\gamma=1,2$) - произвольные седеон-скалярные функции. Тогда оператор в левой части уравнения (7.17) становится скалярным, и уравнение приобретает вид

$$\left\{\frac{p_y^2}{\hbar^2}+\frac{p_z^2}{\hbar^2}+\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2p_y}{\hbar^2 c}q_eH_ex+\frac{q_e{}^2H_e{}^2}{\hbar^2c^2}x^2-\lambda\frac{q_eH_e}{\hbar c}\right\}\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}=\frac{E^2}{\hbar^2c^2}\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}\,. \qquad (7.19)$$

После стандартных алгебраических преобразований данное уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}}{\partial x^2}+\left[\left(\frac{E^2}{\hbar^2c^2}-\frac{p_z^2}{\hbar^2}-\frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}+\lambda\frac{q_eH_e}{\hbar c}\right)-\left(\frac{q_eH_e}{\hbar c}\right)^2\left(x-\frac{cp_y}{q_eH_e}\right)^2\right]\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}=0\,. \qquad (7.20)$$

Это уравнение линейного осциллятора [41]. Множество значений энергии частицы определяется следующим соотношением:

$$E_{n,\lambda}^2=m_0^2c^4+p_z^2c^2+|\,q_e\,|\,H_e\hbar c\left(2n+1\right)-\lambda q_eH_e\hbar c\,. \qquad (7.21)$$

Полученный спектр энергий идентичен спектру для частиц со спином 1/2, получаемому из рассмотрения релятивистского спинорного уравнения Дирака [41].

7.3. Релятивистское уравнение первого порядка

Рассмотрим частицы, которые описываются волновым уравнением первого порядка:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \qquad (7.22)$$

Рассмотрим решение данного уравнения в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$. В этом случае зависимость частоты от волнового вектора имеет две ветви:

$$\omega_{\pm} = \pm\sqrt{c^2\vec{k}^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}\,. \tag{7.23}$$

Будем искать решение в виде:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \left(\mathbf{e_1}\frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e_2}\vec{k} - i\mathbf{e_3}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\exp\left\{-i\omega_{\pm}t + i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}, \tag{7.24}$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ - произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени. Непосредственная подстановка (7.24) в (7.23) показывает, что выражение (7.24) действительно является решением, поскольку выражение в круглых скобках представляет собой седеонный делитель нуля:

$$\left(\mathbf{e_1}\frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e_2}\vec{k} - i\mathbf{e_3}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(\mathbf{e_1}\frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e_2}\vec{k} - i\mathbf{e_3}\frac{m_0 c}{\hbar}\right) \equiv 0\,. \tag{7.25}$$

Более подробно решение в виде плоской волны будет рассмотрено в разделе 8.6.

7.4. Заключение

Можно сделать некоторые общие утверждения относительно вида волновой функции частицы в стационарном состоянии, соответствующем определенным собственным значениям оператора $\mathbf{a_3}$. В стационарном состоянии с энергией E волновая функция имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t) = \tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r})e^{-i\omega t}\,, \tag{7.26}$$

где частота $\omega = E/\hbar$. В состояниях, соответствующих определенным собственным значениям оператора $\mathbf{a_3}$, пространственная часть волновой функции может быть представлена в виде (7.18), так что

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_{\lambda}(\vec{r},t) = \left\{\left(1+\lambda\mathbf{a_3}\right)\mathbf{F}_1^{(\lambda)}(\vec{r}) + \left(\mathbf{a_1}+\lambda i\mathbf{a_2}\right)\mathbf{F}_2^{(\lambda)}(\vec{r})\right\}e^{-i\omega t}\,. \tag{7.27}$$

Данная функция имеет достаточно ясную геометрическую структуру. Действительная и мнимая части компоненты $\left(1+\lambda\mathbf{a_3}\right)e^{-i\omega t}$ являются комбинацией абсолютного скаляра и абсолютного вектора, параллельного оси Z, осциллирующих с частотой ω. Разность фаз меду скалярной и векторной компонентами равна 0 в случае $\lambda=1$ или π в случае $\lambda=-1$. С другой стороны, действительная и мнимая части компоненты $\left(\boldsymbol{a_1}+\lambda i\boldsymbol{a_2}\right)e^{-i\omega t}$ имеют форму вектора, вращающегося с частотой ω в плоскости, перпендикулярной оси Z. Направление вращения зависит от знака λ. При этом конкретная пространственно-временная структура волновой функции определяется частным видом седеон-скалярных функций $\mathbf{F}_1^{(\lambda)}(\vec{r})$ и $\mathbf{F}_2^{(\lambda)}(\vec{r})$.

Таким образом, в стационарном состоянии с энергией E волновая функция частицы с определенной проекцией спина имеет структуру седеонного осциллятора с линейной продольной (по отношению к направлению спина) и круговой перпендикулярной компонентами.

Глава 8. Массивные поля

Попытки обобщения волнового уравнения второго порядка для массивных полей на основе различных систем гиперкомплексных чисел были предприняты в работах [15, 42-45]. Авторы обсуждали возможность конструирования полевых уравнений, сходных с уравнениями электродинамики, но для массивного “фотона”. В частности, были сделаны попытки представить волновое уравнение в виде системы уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям Максвелла. Однако получаемые так называемые уравнения Прока-Максвелла содержат как потенциалы, так и напряженности полей [15,45], т.е. переход к другим переменным выполнен не полностью. С другой стороны, есть ряд исследований, посвященных обобщению волнового уравнения Дирака на основе гиперкомплексных чисел [22,46-49]. При таком подходе волновая функция имеет скалярно-векторную структуру, и гиперкомплексное уравнение Дирака может быть переформулировано как волновое уравнение для потенциала поля.

Рассмотрение многокомпонентных волновых функций является неизбежной необходимостью при описании спиновых и пространственно-временных свойств полей и релятивистских квантовых систем. С другой стороны, последовательный релятивистский подход требует равноправного рассмотрения пространственных и временных свойств физических величин, поэтому требования релятивисткой инвариантности приводят нас к шестнадцатикомпоннтным алгебрам, учитывающим симметрию по отношению к операциям пространственной и временной инверсии. Существуют несколько подходов при развитии теории на основе шестнадцатикомпоннтных структур. Один из них связан с применением седенионов Кэли-Диксона [4,50]. Однако существенным недостатком этих величин является их неассоциативность. Другой подход основан на применении гиперкомплексных многокомпонентных векторов, образующих ассоциативные алгебры [14]. Основная идея таких векторов – это введение дополнительного единичного вектора, ортогонального пространственным ортам. Однако применение этих величин в квантовой механике и теории поля рассматривается, в основном, как одна из возможных абстрактных алгебраических схем для переформулировки уравнений Клейна-Гордона и Дирака, но не затрагивает физическую сущность этих уравнений.

В данной главе мы рассматриваем массивные поля, описываемые волновыми уравнениями первого и второго порядка на основе седеонных потенциалов и пространственно-временных операторов.

8.1. Обобщенное седеонное уравнение для барионного поля

Рассмотрим седеонное волновое уравнение для свободного массивного поля:

$$\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0, \qquad (8.1)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}$ - седеонный потенциал. Введем для удобства новые операторы:

$$\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad m = \frac{m_0 c}{\hbar}. \qquad (8.2)$$

Тогда уравнение (8.1) принимает следующий вид:

$$\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0. \qquad (8.3)$$

Выберем потенциал в виде

$$\tilde{\mathbf{W}} = a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D}, \qquad (8.4)$$

где компоненты $a, b, c, d, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ являются действительными функциями координат и времени. Вводя скалярные и векторные поля, согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
&e = \partial b + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{C}\right) + md,\\
&f = \partial a + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{D}\right) + mc,\\
&g = \partial d + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) - mb,\\
&h = \partial c + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}\right) - ma,\\
&\vec{E} = -\partial \vec{B} - \vec{\nabla} c - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{C}\right] - m\vec{D},\\
&\vec{F} = -\partial \vec{A} - \vec{\nabla} d + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{D}\right] - m\vec{C},\\
&\vec{G} = -\partial \vec{D} - \vec{\nabla} a - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right] + m\vec{B},\\
&\vec{H} = -\partial \vec{C} - \vec{\nabla} b + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}\right] + m\vec{A},
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D}\right)\\
&= -e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_2\vec{G} + \mathbf{e}_3\vec{H},
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

и волновое уравнение (8.3) сводится к

$$
\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(-e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_2\vec{G} + \mathbf{e}_3\vec{H}\right) = 0\,. \tag{8.7}
$$

Производя действие оператора в левой части уравнения и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем систему уравнений для полей, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$
\begin{aligned}
&\partial f + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) - mh = 0\,,\\
&\partial e + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) - mg = 0\,,\\
&\partial h + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) + mf = 0\,,\\
&\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) + me = 0,\\
&\partial\vec{F} + \vec{\nabla}g + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}\right] - m\vec{H} = 0\,,\\
&\partial\vec{E} + \vec{\nabla}h - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] - m\vec{G} = 0\,,\\
&\partial\vec{H} + \vec{\nabla}e + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] + m\vec{F} = 0\,,\\
&\partial\vec{G} + \vec{\nabla}f - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] + m\vec{E} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Данные уравнения обладают специфической калибровочной инвариантностью. Нетрудно проверить, что поля (8.5) и уравнения (8.8) не изменяются при следующих подстановках для потенциалов:

$$
\begin{aligned}
&a \Rightarrow a + \partial\varepsilon_a - m\varepsilon_c,\\
&b \Rightarrow b + \partial\varepsilon_b - m\varepsilon_d,\\
&c \Rightarrow c + \partial\varepsilon_c + m\varepsilon_a,\\
&d \Rightarrow d + \partial\varepsilon_d + m\varepsilon_b,\\
&\vec{A} \Rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\varepsilon_d,\\
&\vec{B} \Rightarrow \vec{B} - \vec{\nabla}\varepsilon_c,\\
&\vec{C} \Rightarrow \vec{C} - \vec{\nabla}\varepsilon_b,\\
&\vec{D} \Rightarrow \vec{D} - \vec{\nabla}\varepsilon_a,
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

где ε_a, ε_b, ε_c, ε_d - произвольные скалярные функции, удовлетворяющие однородному уравнению Клейна-Гордона.

Умножая каждое из уравнений (8.8) на соответствующую напряженность поля и складывая, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(f^2+e^2+h^2+g^2+\vec{F}^2+\vec{E}^2+\vec{H}^2+\vec{G}^2\right)\\
&+f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)+e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)+h\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)\\
&+\left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}g\right)+\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}h\right)+\left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}e\right)+\left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}f\right)\\
&+i\left(\vec{F}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}\right]\right)-i\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)+i\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)-i\left(\vec{G}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]\right)=0\,.
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
w&=-\frac{1}{8\pi}\left(e^2+f^2+g^2+h^2+\vec{E}^2+\vec{F}^2+\vec{G}^2+\vec{H}^2\right),\\
\vec{P}&=-\frac{c}{4\pi}\left(e\vec{H}+f\vec{G}+g\vec{F}+h\vec{E}+i\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]+i\left[\vec{G}\times\vec{F}\right]\right).
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Тогда уравнение (8.9) может быть представлено в виде:

$$
\frac{\partial w}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)=0\quad . \tag{8.12}
$$

Это аналог теоремы Пойнтинга для массивных полей. При этом величина w играет роль плотности энергии поля, а $\vec{P}$ - вектора плотности потока энергии. Знаки “минус” в выражениях (8.11) выбраны в соответствии с тем, что взаимодействие между барионами носит характер притяжения, как и в гравитационном взаимодействии.

8.2. Неоднородное уравнение барионного поля

Рассмотрим неоднородное седеонное уравнение для барионного поля с феноменологическим источником. В этом случае потенциал поля удовлетворяет уравнению

$$
\left(i\mathbf{e}_1\partial-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_3 m\right)\left(i\mathbf{e}_1\partial-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_3 m\right)\tilde{\mathbf{W}}=\tilde{\mathbf{J}}. \tag{8.13}
$$

По аналогии с гравитодинамикой мы рассмотрим источник барионного поля следующего вида:

$$
\tilde{\mathbf{J}}=-i\mathbf{e}_1 4\pi\rho_B-\mathbf{e}_2\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B\,, \tag{8.14}
$$

где ρ_B - объемная плотность барионного заряда, а $\vec{j}_B$ - плотность барионного тока. В этом случае мы можем описать барионное поле укороченным потенциалом вида

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_1 b + \mathbf{e}_2 \vec{C}, \tag{8.15}$$

где $b(\vec{r},t)$ является скалярной частью, а $\vec{C}(\vec{r},t)$ векторной частью четырехмерного барионного потенциала. При этом отличны от нуля только следующие напряженности поля:

$$\begin{aligned}
&e = \partial b + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right),\\
&g = -mb,\\
&\vec{E} = -i\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right],\\
&\vec{F} = -m\vec{C},\\
&\vec{H} = -\partial\vec{C} - \vec{\nabla}b.
\end{aligned} \tag{8.16}$$

Волновое уравнение (8.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(-e - i\mathbf{e}_2 g - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_3\vec{H}\right)\\
&= -i\mathbf{e}_1 4\pi\rho_B - \mathbf{e}_2\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Тогда система уравнений для барионного поля записывается виде:

$$\begin{aligned}
&\partial e + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) - mg = 4\pi\rho_B,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = 0,\\
&\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) + me = 0,\\
&\partial\vec{F} + \vec{\nabla}g - m\vec{H} = 0,\\
&\partial\vec{E} - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] = 0,\\
&\partial\vec{H} + \vec{\nabla}e + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] + m\vec{F} = -\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B,\\
&-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] + m\vec{E} = 0.
\end{aligned} \tag{8.18}$$

С другой стороны, применяя к уравнению (8.17) оператор $\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)$, мы получаем следующие волновые уравнения для напряженностей барионного поля:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)e = 4\pi\left(\partial\rho_B + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_B\right)\right),\\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)g = -4\pi m\rho_B,\\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{F} = -m\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B,\\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{E} = -i\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_B\right],\\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{H} = -4\pi\left(\frac{1}{c}\partial\vec{j}_B + \vec{\nabla}\rho_B\right).
\end{aligned}
\tag{8.19}
$$

Предполагая сохранение барионного заряда

$$\partial\rho_B + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_B\right) = 0\,, \tag{8.20}$$

мы можем выбрать напряженность скалярного поля e равной нулю. Это эквивалентно следующему калибровочному условию:

$$\partial b + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) = 0\,, \tag{8.21}$$

аналогичному условию калибровки Лоренца в электродинамике.

8.3. Стационарное поле точечного скалярного источника

В стационарном случае $\vec{j}_B = 0$, и потенциал поля может быть выбран в виде скалярного потенциала

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_1 b\left(\vec{r}\right). \tag{8.22}$$

Тогда отличны от нуля только две компоненты поля:

$$
\begin{aligned}
&g = -mb\,,\\
&\vec{H} = -\vec{\nabla}b\,.
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

Для них уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) - mg = 4\pi\rho_B \ , \\ &\vec{\nabla} g - m\vec{H} = 0 \ , \\ &\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] = 0 \ . \end{aligned} \tag{8.24}$$

Рассмотрим точечный источник барионного поля. В этом случае плотность барионного заряда равна

$$\rho_B = q_B \delta\left(\vec{r}\right), \tag{8.25}$$

где q_B - точечный барионный заряд. Тогда стационарное волновое уравнение может быть записано в сферических координатах в следующей форме:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) b\left(\vec{r}\right) = -\,4\pi q_B \delta\left(\vec{r}\right). \tag{8.26}$$

Частным решением уравнения (8.26) является

$$b = \frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right). \tag{8.27}$$

Таким образом, стационарное барионное поле точечного источника имеет скалярную и векторную компоненты

$$g_B = -\frac{m_0 c}{\hbar}\frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right), \tag{8.28}$$

$$\vec{H}_B = \left(\frac{1}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right)\vec{r}_0 , \tag{8.29}$$

где $\vec{r}_0$ - единичный радиус-вектор.

8.4. Барион - барионное взаимодействие

Рассмотрим взаимодействие двух неподвижных точечных барионов за счет перекрытия их полей. Учитывая, что барионное поле в этом случае представляется суммой двух полей: $g = g_{B1} + g_{B2}$ и $\vec{H} = \vec{H}_{B1} + \vec{H}_{B2}$, из выражения (8.11) следует, что энергия взаимодействия двух барионов равна

$$W_{BB} = -\frac{1}{4\pi}\int\left\{g_{B1}g_{B2} + \left(\vec{H}_{B1}\cdot\vec{H}_{B2}\right)\right\} dV\ , \tag{8.30}$$

где интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда (8.28) и (8.29), получаем, что энергия барион-барионного взаимодействия равна

$$W_{BB} = -\frac{q_{B1}q_{B2}}{R}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar}R\right), \tag{8.31}$$

где R - расстояние между барионами. Здесь мы предполагаем, что взаимодействие между барионами имеет характер притяжения.

8.5. Седеонное уравнение для лептонного поля

В работе [22] была высказана гипотеза, что лептонное поле описывается седеонным уравнением первого порядка, аналогичным уравнению Дирака. В седеонной алгебре однородное уравнение первого порядка записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e_1}\partial - \mathbf{e_2}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_3}m\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0. \tag{8.32}$$

В уравнении (8.32) базисные элементы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ играют роль пространственно-временных операторов, которые преобразуют волновую функцию $\tilde{\mathbf{W}}$ посредством изменения ее пространственно-временной структуры. Выбирая потенциал в виде (8.4), мы получаем, что седеонное уравнение (8.32) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\partial a + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) + mc = 0,\\
&\partial b + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) + md = 0,\\
&\partial c + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - ma = 0,\\
&\partial d + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - mb = 0,\\
&\partial\vec{A} + \vec{\nabla}d - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{D}\right] + m\vec{C} = 0,\\
&\partial\vec{B} + \vec{\nabla}c + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right] + m\vec{D} = 0,\\
&\partial\vec{C} + \vec{\nabla}b - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right] - m\vec{A} = 0,\\
&\partial\vec{D} + \vec{\nabla}a + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] - m\vec{B} = 0.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Фактически эти уравнения описывают специальные поля, у которых напряженности равны нулю [22] (см. выражение (8.5)).

Умножая скалярно каждое уравнение системы (8.33) на соответствующие компоненты потенциала $\tilde{\mathbf{W}}$ и складывая, получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2+\vec{D}^2\right)\\
&+a\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)+b\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right)+c\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)+d\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\\
&+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}d\right)+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}c\right)+\left(\vec{C}\cdot\vec{\nabla}b\right)+\left(\vec{D}\cdot\vec{\nabla}a\right)\\
&-i\left(\vec{A}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{D}\right]\right)+i\left(\vec{B}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right]\right)\\
&-i\left(\vec{C}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]\right)+i\left(\vec{D}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\right)=0.
\end{aligned} \tag{8.34}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{W} = \frac{1}{8\pi}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2+\vec{D}^2\right), \tag{8.35}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left(a\vec{D}+b\vec{C}+c\vec{B}+d\vec{A}+i\left[\vec{A}\times\vec{D}\right]+i\left[\vec{C}\times\vec{B}\right]\right). \tag{8.36}$$

Тогда уравнение (8.34) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{S}\right) = 0 \quad . \qquad (8.37)$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для массивных полей (описываемых уравнением первого порядка), записанным для потенциалов поля.

8.6. Решение в виде плоской волны

Однородное волновое уравнение первого порядка

$$\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2 \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\mathbf{W}} = 0 \qquad (8.38)$$

имеет решение в виде плоской волны. Будем искать потенциал в виде:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{U}} \exp\left\{ -i\omega t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \qquad (8.39)$$

где ω - частота, $\vec{k}$ - волновой вектор. Амплитуда волны $\tilde{\mathbf{U}}$ не зависит от координат и времени. В этом случае зависимость частоты от волнового вектора имеет две ветви:

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} \; . \qquad (8.40)$$

Подставляя (8.39), с учетом (8.40), в исходное уравнение (8.38), получаем:

$$\left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\mathbf{U}} = 0 \; . \qquad (8.41)$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$\omega' = \frac{\omega_{\pm}}{c} ,$$

$$m = \frac{m_0 c}{\hbar} .$$

Тогда уравнение (8.41) запишется следующим образом:

$$\left(\mathbf{e}_1 \omega' - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 m \right) \tilde{\mathbf{U}} = 0 \; . \qquad (8.42)$$

Выберем амплитуду волновой функции в виде (8.4):

$$\tilde{\mathbf{U}} = a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D} \;,$$

где a, b, c, d - произвольные постоянные, а $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ - произвольные векторы. Тогда уравнение (8.42) принимает вид

$$\begin{gathered}\left(\mathbf{e}_1\omega' - i\mathbf{e}_2\vec{k} - i\mathbf{e}_3 m\right) \\ \times\left(a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D}\right) = 0.\end{gathered} \tag{8.43}$$

Введем параллельные и перпендикулярные (по отношению к волновому вектору $\vec{k}$) компоненты векторного потенциала:

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \vec{A}_{\parallel} + \vec{A}_{\perp}, \\ \vec{B} &= \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp}, \\ \vec{C} &= \vec{C}_{\parallel} + \vec{C}_{\perp}, \\ \vec{D} &= \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}.\end{aligned} . \tag{8.44}$$

Тогда, производя седеонное умножение в уравнении (8.43), мы получаем три системы уравнений:

$$\begin{aligned}&\omega' b - kC_{\parallel} + imd = 0, \\ &\omega' a - kD_{\parallel} + imc = 0, \\ &\omega' d - kA_{\parallel} - imb = 0, \\ &\omega' c - kB_{\parallel} - ima = 0,\end{aligned} \tag{8.45}$$

$$\begin{aligned}&\omega' B_{\parallel} - kc + imD_{\parallel} = 0, \\ &\omega' A_{\parallel} - kd + imC_{\parallel} = 0, \\ &\omega' D_{\parallel} - ka - imB_{\parallel} = 0, \\ &\omega' C_{\parallel} - kb - imA_{\parallel} = 0,\end{aligned} \tag{8.46}$$

$$\begin{aligned}&\omega'\vec{B}_{\perp} - i\left[\vec{k}\times\vec{C}_{\perp}\right] + im\vec{D}_{\perp} = 0, \\ &i\omega'\vec{A}_{\perp} - \left[\vec{k}\times\vec{D}_{\perp}\right] - m\vec{C}_{\perp} = 0, \\ &i\omega'\vec{D}_{\perp} + \left[\vec{k}\times\vec{A}_{\perp}\right] + m\vec{B}_{\perp} = 0, \\ &i\omega'\vec{C}_{\perp} - \left[\vec{k}\times\vec{B}_{\perp}\right] + m\vec{A}_{\perp} = 0,\end{aligned} \tag{8.47}$$

где величины $A_\parallel$, $B_\parallel$, $C_\parallel$ и $D_\parallel$ представляют собой проекции соответствующих векторов на вектор $\vec{k}$. Из уравнений (8.45) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
A_\parallel &= \frac{\omega'}{k}d - i\frac{m}{k}b,\\
B_\parallel &= \frac{\omega'}{k}c - i\frac{m}{k}a,\\
C_\parallel &= \frac{\omega'}{k}b + i\frac{m}{k}d,\\
D_\parallel &= \frac{\omega'}{k}a + i\frac{m}{k}c.
\end{aligned} \tag{8.48}$$

С другой стороны, из уравнений (8.47) получается

$$\begin{aligned}
\vec{C}_\perp &= \frac{im}{\omega'}\vec{A}_\perp - \frac{i}{\omega'}\left[\vec{k}\times\vec{B}_\perp\right],\\
\vec{D}_\perp &= \frac{im}{\omega'}\vec{B}_\perp + \frac{i}{\omega'}\left[\vec{k}\times\vec{A}_\perp\right].
\end{aligned} \tag{8.49}$$

Тогда амплитуда $\tilde{\mathbf{U}}$ может быть записана как

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{U}} = {} & a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d\\
&+\left\{i\omega' d + mb + \mathbf{e}_1\omega' c - i\mathbf{e}_1 ma\right\}\frac{\vec{k}}{k^2}\\
&+\left\{\mathbf{e}_2\omega' b + i\mathbf{e}_2 md - \mathbf{e}_3\omega' a - i\mathbf{e}_3 mc\right\}\frac{\vec{k}}{k^2}\\
&+i\vec{A}_\perp + \mathbf{e}_1\vec{B}_\perp + i\mathbf{e}_2\frac{m}{\omega'}\vec{A}_\perp - i\mathbf{e}_3\frac{m}{\omega'}\vec{B}_\perp\\
&-i\mathbf{e}_3\frac{1}{\omega'}\left[\vec{k}\times\vec{A}_\perp\right] - i\mathbf{e}_2\frac{1}{\omega'}\left[\vec{k}\times\vec{B}_\perp\right].
\end{aligned} \tag{8.50}$$

Соотношение (8.50) можно представить в более компактной форме:

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left(\mathbf{e}_1\omega' - i\mathbf{e}_2\vec{k} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left\{i\mathbf{e}_2\frac{\vec{k}}{k^2}\left(a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d\right) + i\mathbf{e}_1\frac{1}{\omega'}\vec{A}_\perp + \frac{1}{\omega'}\vec{B}_\perp\right\}. \tag{8.51}$$

Подставляя (8.51) в уравнение (8.42), можно видеть, что с учетом (8.40) это уравнение удовлетворяется при любых параметрах a, b, c, d, $\vec{A}_\perp$, $\vec{B}_\perp$, поскольку

$$\left(\mathbf{e}_1\omega' - i\mathbf{e}_2\vec{k} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(\mathbf{e}_1\omega' - i\mathbf{e}_2\vec{k} - i\mathbf{e}_3 m\right) \equiv 0 . \qquad (8.52)$$

Выражение в круглых скобках является так называемым седеонным делителем нуля.

Таким образом, в общем случае решение уравнения (8.32) может быть записано в виде плоской волны общего вида:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_\pm}{c} - i\mathbf{e}_2\vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\mathbf{M}} \exp\left\{-i\omega_\pm t + i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}, \qquad (8.53)$$

где $\tilde{\mathbf{M}}$ - произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени.

8.7. Неоднородное уравнение лептонного поля

Рассмотрим неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (8.32):

$$\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{I}}. \qquad (8.54)$$

Здесь седеонный источник $\tilde{\mathbf{I}}$ описывает лептонные заряды и соответствующие токи. Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}$ в виде (8.4), мы получаем следующее уравнение для напряженностей лептонного поля:

$$-e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_2\vec{G} + \mathbf{e}_3\vec{H} = \mathbf{I}_0 + \vec{\mathbf{I}} . \qquad (8.55)$$

Данное уравнение означает, что напряженности лептонного поля отличны от нуля только в области источников.

Рассмотрим лептонный источник в виде

$$\tilde{\mathbf{I}} = -i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_L + \mathbf{e}_1 \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L , \qquad (8.56)$$

где ρ_L - объемная плотность лептонного заряда, $\vec{j}_L$ - объемная плотность лептонного тока. В этом случае уравнение (8.55) записывается в следующем виде:

$$-i\mathbf{e}_2 g + \mathbf{e}_1\vec{F} = -i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_L + \mathbf{e}_1 \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L . \qquad (8.57)$$

Применяя к (8.57) оператор $\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)$ и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, имеем следующие уравнения для напряженностей лептонного поля:

$$
\begin{aligned}
& g = 4\pi\rho_L, \\
& \vec{F} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L, \\
& \partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) = 4\pi\left\{\partial\rho_L + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_L\right)\right\}, \\
& \left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_L\right], \\
& \partial\vec{F} + \vec{\nabla}g = 4\pi\left\{\frac{1}{c}\partial\vec{j}_L + \vec{\nabla}\rho_L\right\}.
\end{aligned}
\tag{8.58}
$$

Предполагая сохранение лептонного заряда:

$$
\partial\rho_L + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_L\right) = 0\,, \tag{8.59}
$$

мы получаем следующее калибровочное условие:

$$
\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) = 0\,, \tag{8.60}
$$

которое аналогично условию калибровки Лоренца, но только не для потенциалов, а для напряженностей лептонного поля.

Рассмотрим стационарное лептонное поле, создаваемое скалярным точечным источником. В этом случае

$$
\rho_L = q_L\delta\left(\vec{r}\right), \tag{8.61}
$$

где q_L является точечным лептонным зарядом. Тогда напряженность скалярного лептонного поля равна

$$
g_L\left(\vec{r}\right) = 4\pi\, q_L\delta\left(\vec{r}\right). \tag{8.62}
$$

Поскольку напряженность поля отлична от нуля только в области источника, это означает, что два точечных лептона взаимодействуют только тогда, когда они находятся в одной и той же точке пространства. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов q_{L1} и q_{L2} в этом случае равна

$$
W_{LL} = -\frac{1}{4\pi}\int_V g_{L1}g_{L2}\,dV = -4\pi q_{L1}q_{L2}\delta\left(\vec{R}\right), \tag{8.63}
$$

где $\vec{R}$ - расстояние между лептонами.

8.8. Барион – лептонное взаимодействие

Взаимодействие барионов с лептонами осуществляется за счет перекрытия скалярных полей g_B и g_L. В случае точечного бариона и точечного лептона поля определяются выражениями (8.28) и (8.68), так что энергия взаимодействия равна

$$W_{BL} = -\frac{1}{4\pi}\int_V g_B g_L dV \ . \tag{8.64}$$

В итоге получаем:

$$W_{BL} = -\frac{m_0 c}{\hbar}\frac{q_B q_L}{R}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar}R\right), \tag{8.65}$$

где R - расстояние между барионом и лептоном.

8.9. Заключение

Таким образом, рассмотрено седеонное обобщение уравнений, описывающих массивные поля. Показано, что такой подход позволяет построить для массивных полей теорию, аналогичную теории безмассового электромагнитного поля в классической электродинамике.

Рассмотрено седеонное волновое уравнение второго порядка для седеонной волновой функции. Показано, что это уравнение может быть интерпретировано как уравнение для потенциалов барионного поля. Продемонстрировано, что волновое уравнение второго порядка для потенциалов может быть представлено в виде системы уравнений первого порядка для напряженностей поля, аналогичной системе уравнений Максвелла. Определены понятия плотности энергии и плотности потока энергии массивного поля. Получено выражение, описывающее закон сохранения энергии массивного поля, аналогичное теореме Пойнтинга в электродинамике. Показано, что поле точечных барионов описывается потенциалами типа потенциалов Юкавы. Рассмотрено взаимодействие двух точечных барионов, обусловленное перекрытием скалярных и векторных полей;

рассчитана зависимость энергии взаимодействия барионов от расстояния между ними.

Предполагая, что лептонное поле описывается волновым уравнением первого порядка, показано, что напряженности лептонных полей отличны от нуля только в области источников, поэтому точечные лептоны взаимодействуют только тогда, когда они находятся в одной и той же точке пространства. Найдено решение однородного седеонного уравнения первого порядка в виде плоской волны.

Показана возможность описания барион-лептонного взаимодействия в терминах перекрытия скалярных полей.

Глава 9. Нейтринное поле

9.1. Седеонные уравнения нейтринного поля

Среди решений седеонного однородного волнового уравнения гравитоэлектромагнитного поля есть особый класс, удовлетворяющий седеонному уравнению первого порядка следующего вида [18]:

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{\nabla} \right) \tilde{\mathbf{W}}_{\nu} = 0 . \tag{9.1}$$

Поле, удовлетворяющее данному уравнению, мы будем называть нейтринным полем. Основываясь на аналогии с гравитоэлектромагнетизмом (см. (6.12)), рассмотрим потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_{\nu}$ в виде

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\nu} = i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \varphi_{\nu} + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{A}_{\nu} , \tag{9.2}$$

где φ_{ν} и $\vec{A}_{\nu}$ - комплексные скалярный и векторный потенциалы нейтринного поля:

$$\varphi_{\nu} = \varphi_{e} + i\varphi_{g} , \tag{9.3}$$

$$\vec{A}_{\nu} = \vec{A}_{e} + i\vec{A}_{g} . \tag{9.4}$$

Таким образом, уравнение для свободного нейтринного поля может быть представлено в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{\nabla} \right) \left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \varphi_{\nu} + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{A}_{\nu} \right) = 0 . \tag{9.5}$$

Действуя оператором

$$i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{\nabla}$$

на уравнение (9.5),имеем

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \left(i\mathbf{e}_{\mathrm{t}} \varphi_{\nu} + \mathbf{e}_{\mathrm{r}} \vec{A}_{\nu} \right) = 0 . \tag{9.6}$$

Отсюда, разделяя величины с различными пространственно-временными и зарядовыми свойствами, мы получаем волновые уравнения для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_e=0, \tag{9.7}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_g=0, \tag{9.8}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_e=0, \tag{9.9}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_g=0. \tag{9.10}$$

Это показывает, что потенциалы нейтринного поля φ_e, φ_g, $\vec{A}_e$, $\vec{A}_g$ удовлетворяют таким же волновым уравнения второго порядка, что и потенциалы гравитоэлектромагнитного поля, однако уравнение (9.5) выделяет только те решения, у которых напряженности электрического (гравитэлектрического) и магнитного (гравитомагнитного) полей равны нулю. Действительно, производя седеонное умножение в уравнении (9.5), имеем

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi_\nu-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]=0. \tag{9.11}$$

Разделяя в (9.11) величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующую систему уравнений для потенциалов нейтринного поля:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}+\vec{\nabla}\varphi_e=0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}+\vec{\nabla}\varphi_g=0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]=0.
\end{aligned}\tag{9.12}$$

Таким образом, можно предполагать, что уравнение (9.5) описывает специфическое гравитоэлектромагнитное поле, у которого потенциалы φ_e и $\vec{A}_e$ описывают электромагнитную компоненту, а потенциалы φ_g и $\vec{A}_g$ - гравитационную компоненту нейтринного поля.

9.2. Соотношения второго порядка для нейтринного поля

Умножая уравнение (9.5) на потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\nu$ слева, имеем следующее седеонное уравнение :

$$\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)=0.\tag{9.13}$$

Производя в нем умножение и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы приходим к соотношениям второго порядка для потенциалов нейтринного поля:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu^2+\vec{A}_\nu^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_\nu\vec{A}_\nu\right)=0,\tag{9.14}$$

$$\left(\vec{A}_\nu\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]\right)=0\,,\tag{9.15}$$

$$\frac{1}{c}\left[\vec{A}_\nu\times\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}\right]+\left[\varphi_\nu\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]+\left[\vec{A}_\nu\times\vec{\nabla}\varphi_\nu\right]=0\,,\tag{9.16}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu \vec{A}_\nu\right\}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_\nu^2-\vec{A}_\nu^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)\vec{A}_\nu=0. \qquad (9.17)$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varepsilon}_e\boldsymbol{\varepsilon}_g=0$, получаем следующие четыре соотношения:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e^2+\vec{A}_e^2-\varphi_g^2-\vec{A}_g^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_e\vec{A}_e\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_g\vec{A}_g\right)=0, \qquad (9.18)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_e^2-\vec{A}_e^2-\varphi_g^2+\vec{A}_g^2\right\}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e\vec{A}_e-\varphi_g\vec{A}_g\right\}\\&+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)\vec{A}_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)\vec{A}_g=0,\end{aligned} \qquad (9.19)$$

$$\left(\vec{A}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]\right)-\left(\vec{A}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right)=0, \qquad (9.20)$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}\left\{\left[\vec{A}_e\times\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{A}_g\times\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right]\right\}\\&+\left[\varphi_e\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]-\left[\varphi_g\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]+\left[\vec{A}_e\times\vec{\nabla}\varphi_e\right]-\left[\vec{A}_g\times\vec{\nabla}\varphi_g\right]=0.\end{aligned} \qquad (9.21)$$

С другой стороны, умножая уравнение (9.5) на $\left(-i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)$ слева, мы получаем другое седеонное уравнение:

$$\left(-i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)=0. \qquad (9.22)$$

После умножения и разделения величин с различными пространственно-временными свойствами, выражение (9.22) приводится к системе четырех уравнений:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu^2-\vec{A}_\nu^2\right\}+\varphi_\nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)-\left(\vec{A}_\nu\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_\nu=0, \qquad (9.23)$$

$$\left(\vec{A}_\nu\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]\right)=0, \qquad (9.24)$$

$$\frac{1}{c}\left[\vec{A}_\nu\times\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}\right]-\left[\vec{\nabla}\times\varphi_\nu\vec{A}_\nu\right]=0, \qquad (9.25)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_\nu^2+\vec{A}_\nu^2\right\}+\frac{1}{c}\left\{\varphi_\nu\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}-\vec{A}_\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}\right\}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)\vec{A}_\nu=0. \qquad (9.26)$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание, что $\boldsymbol{\varepsilon}_e\boldsymbol{\varepsilon}_g=0$, мы получаем следующие четыре соотношения:

$$\begin{gathered}\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e^2-\vec{A}_e^2-\varphi_g^2+\vec{A}_g^2\right\}\\+\varphi_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)+\varphi_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)-\left(\vec{A}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_e-\left(\vec{A}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_g=0,\end{gathered} \qquad (9.27)$$

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_e^2+\vec{A}_e^2-\varphi_g^2-\vec{A}_g^2\right\}\\+\frac{1}{c}\left\{\varphi_e\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\vec{A}_e\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\vec{A}_g\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}-\varphi_g\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right\}\\-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)\vec{A}_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)\vec{A}_g=0,\end{gathered} \qquad (9.28)$$

$$\left(\vec{A}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]\right)-\left(\vec{A}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right)=0, \qquad (9.29)$$

$$\frac{1}{c}\left\{\left[\vec{A}_e\times\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{A}_g\times\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right]\right\}-\left[\vec{\nabla}\times\varphi_e\vec{A}_e\right]+\left[\vec{\nabla}\times\varphi_g\vec{A}_g\right]=0. \qquad (9.30)$$

Выражения (9.18), (9.19), (9.27) и (9.28) являются аналогами теоремы Пойнтинга и инвариантов Лоренца для нейтринного поля.

9.3. Решение в виде плоской волны

Волновое уравнение первого порядка для нейтринного поля

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\nu=0 \qquad (9.31)$$

имеет решение в виде плоской волны:

$$\tilde{\mathbf{W}}_\nu=\tilde{\mathbf{U}}_\nu\exp\left\{-i\omega t+i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}. \qquad (9.32)$$

В этом случае дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega_\pm=\pm ck, \qquad (9.33)$$

где k - модуль волнового вектора. Решение уравнения (9.31) в виде плоской волны можно получить непосредственно из решения уравнения первого порядка для массивного поля (8.44), приравнивая массу кванта поля нулю. В общем случае, решение уравнения (9.31) может быть записано в виде плоской волны следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\nu} = \left(\mathbf{e_1} \frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e_2}\vec{k} \right) \tilde{\mathbf{M}}_{\nu} \exp\left\{ -i\omega_{\pm} t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \tag{9.34}$$

где $\tilde{\mathbf{M}}_{\nu}$ - произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени.

Проанализируем это решение. Предположим, что волновой вектор $\vec{k}$ направлен вдоль оси z. Тогда уравнение (9.31) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3}\frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{\mathbf{W}}'_{\nu} = 0, \tag{9.35}$$

где $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu} = i\mathbf{e_t}\tilde{\mathbf{W}}_{\nu}$. Его решение представляется в виде двух волн:

$$\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+} = -\left(1 + \mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3} \right) k \tilde{\mathbf{M}}_{\nu} \exp\left\{ -i\omega_{+} t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \tag{9.36}$$

$$\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-} = \left(1 - \mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3} \right) k \tilde{\mathbf{M}}_{\nu} \exp\left\{ -i\omega_{-} t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}. \tag{9.37}$$

Заметим, что $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+}$ соответствует положительной ветви дисперсионного соотношения (9.33) и описывает частицу с положительной энергией, в то время как $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-}$ соответствует отрицательной ветви дисперсионного соотношения (9.33) и описывает частицу с отрицательной энергией. Кроме того, как видно, волны (9.36) и (9.37) являются собственными функциями оператора спина:

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3}. \tag{9.38}$$

Действительно, можно проверить, что $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu}$ удовлетворет уравнению

$$\hat{S}_z \tilde{\mathbf{W}}'_{\nu} = S_z \tilde{\mathbf{W}}'_{\nu}, \tag{9.39}$$

где собственные значения $S_z = \pm 1/2$. Таким образом, волна $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+}$ описывает частицу со спиральностью $S_z = +1/2$, в то время как волна $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-}$ описывает античастицу со спиральностью $S_z = -1/2$.

9.4. Скалярный нейтринный источник

Рассмотрим неоднородное уравнение нейтринного поля вида

$$\left(i\mathbf{e_t} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} \right)\tilde{\mathbf{W}}_\nu = \tilde{\mathbf{I}}_\nu , \tag{9.40}$$

где $\tilde{\mathbf{I}}_\nu$ - феноменологический источник. Выберем скалярный источник в виде

$$\tilde{\mathbf{I}}_\nu = -4\pi\sigma_\nu , \tag{9.41}$$

где σ_ν является плотностью нейтринного заряда и имеет две компоненты:

$$\sigma_\nu = \sigma_{\nu e} + i\sigma_{\nu g} . \tag{9.42}$$

Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\nu$ в виде (9.2):

$$\tilde{\mathbf{W}}_\nu = i\mathbf{e_t}\varphi_\nu + \mathbf{e_r}\vec{A}_\nu , \tag{9.43}$$

получаем уравнение нейтринного поля в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e_t} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} \right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu + \mathbf{e_r}\vec{A}_\nu \right) = 4\pi\sigma_\nu . \tag{9.44}$$

Отсюда следует, что отлична от нуля только напряженность скалярного поля f_ν:

$$f_\nu = 4\pi\sigma_\nu . \tag{9.45}$$

Для точечного источника плотность нейтринного заряда равна

$$\sigma_\nu = q_\nu \delta(\vec{r}) , \tag{9.46}$$

где q_ν - точечный нейтринный заряд:

$$q_\nu = q_{\nu e} + iq_{\nu g} . \tag{9.47}$$

Тогда энергия взаимодействия двух точечных нейтринных зарядов может быть представлена следующим образом:

$$W_{v1v2} = \frac{1}{4\pi}\int f_{v1} f_{v2} dV\ . \tag{9.48}$$

Подставляя сюда (9.45) и (9.46), получаем

$$W_{v1v2} = 4\pi\left(q_{ve1}q_{ve2} - q_{vg1}q_{vg2}\right)\delta(\vec{R})\,, \tag{9.49}$$

где $\vec{R}$ - расстояние между точечными нейтринными зарядами.

9.5. Заключение

Таким образом, в данной главе мы развили описание безмассового нейтринного поля на основе пространственно-временной алгебры шестнадцатикомпонентных седеонов. Получены соотношения второго порядка для потенциалов нейтринного поля, аналогичные соотношениям для энергии и инвариантов Лоренца гравитоэлектромагнитного поля. Приводится решение волнового уравнения первого порядка для безмассового поля в виде плоской волны. Получено выражение для энергии взаимодействия нейтринных зарядов.

Глава 10. Суперсимметричные уравнения поля

В классической электродинамике поле описывается скалярным φ и векторным $\vec{A}$ потенциалами [26]. При этом, напряженности электрического и магнитного полей определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &\vec{E} = -\partial\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi, \\ &\vec{H} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Здесь $\vec{\nabla}$ - оператор Гамильтона (оператор набла) и мы использовали дифференциальный оператор по времени в следующей форме:

$$\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{10.2}$$

где c – скорость света. Потенциалы удовлетворяют калибровке Лоренца

$$\partial\varphi + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) = 0\,. \tag{10.3}$$

Уравнения электромагнитного поля являются калибровочно инвариантными. Подстановки вида

$$\begin{aligned} &\varphi \to \varphi + \partial\alpha, \\ &\vec{A} \to \vec{A} - \vec{\nabla}\alpha, \end{aligned} \tag{10.4}$$

не изменяют (см. 10.1) электрическое и магнитное поля. Здесь $\alpha(\vec{r},t)$ - произвольная скалярная функция удовлетворяющая, в силу калибровки Лоренца (10.3), однородному волновому уравнению. Однако, в случае, когда масса кванта поля не равна нулю, существует проблема нарушения калибровочной инвариантности.

В настоящей главе седеонный подход используется для конструирования симметричных полевых уравнений. Обсуждается калибровочная инвариантность суперсимметричных седеонных уравнений массивных и безмассовых полей.

10.1. Суперсимметричное уравнение второго порядка для массивного поля

Рассмотрим седеонное волновое уравнение второго порядка для массивного поля [19]:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}}. \tag{10.5}$$

где $\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}$ - седеонный потенциал, $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}}$ - феноменологический седеонный источник массивного поля (индекс **m**). Здесь и далее используются следующие операторы:

$$\begin{gathered}\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\\ \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_1} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_2} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_3},\\ m = \frac{m_0 c}{\hbar}.\end{gathered} \tag{10.6}$$

Выберем потенциал в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}} = ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4, \tag{10.7}$$

где компоненты a_{S} и $\vec{A}_{\mathrm{S}}$ являются функциями координат и времени. Здесь и далее индекс S принимает следующие значения: S = 1, 2, 3, 4. Также мы выберем источник поля в следующей форме:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{m}} = -i\rho_1\mathbf{e_t} + i\rho_2\mathbf{e_r} - \rho_3 + i\rho_4\mathbf{e_{tr}} - \vec{j}_1\mathbf{e_r} - \vec{j}_2\mathbf{e_t} + \vec{j}_3\mathbf{e_{tr}} - \vec{j}_4 i, \tag{10.8}$$

где $\rho_{\mathrm{S}} = 4\pi\rho'_{\mathrm{S}}$ (ρ'_{k} - объемные плотности зарядов), а $\vec{j}_{\mathrm{S}} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}'_{\mathrm{S}}$ ($\vec{j}'_{\mathrm{S}}$ - объемные плотности токов). Перемножая операторы в левой части уравнения (10.5), мы получаем следующие волновые уравнения для скалярных и векторных компонентов потенциалов:

$$\begin{gathered}\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)a_{\mathrm{S}} = \rho_{\mathrm{S}},\\ \left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{A}_{\mathrm{S}} = \vec{j}_{\mathrm{S}}.\end{gathered} \tag{10.9}$$

Введем напряженность скалярного поля g_{S} и напряженность векторного поля $\vec{G}_{\mathrm{S}}$ согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \partial a_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1\right) + m a_4, \\
g_2 &= \partial a_2 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2\right) - m a_3, \\
g_3 &= \partial a_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_3\right) + m a_2, \\
g_4 &= \partial a_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_4\right) - m a_1, \\
\vec{G}_1 &= -\partial \vec{A}_1 - \vec{\nabla} a_1 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_2\right] + m\vec{A}_4, \\
\vec{G}_2 &= -\partial \vec{A}_2 - \vec{\nabla} a_2 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right] - m\vec{A}_3, \\
\vec{G}_3 &= -\partial \vec{A}_3 - \vec{\nabla} a_3 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_4\right] + m\vec{A}_2, \\
\vec{G}_4 &= -\partial \vec{A}_4 - \vec{\nabla} a_4 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_3\right] - m\vec{A}_1.
\end{aligned}
\tag{10.10}
$$

Заметим, что определения напряженностей поля (10.10) имеют специфическую калибровочную инвариантность. Нетрудно проверить, что g_S и $\vec{G}_\mathrm{S}$ не изменяются при следующих заменах потенциалов:

$$
\begin{aligned}
& a_1 \Rightarrow a_1 + \partial \varepsilon_1 - m\varepsilon_4, \\
& a_2 \Rightarrow a_2 + \partial \varepsilon_2 + m\varepsilon_3, \\
& a_3 \Rightarrow a_3 + \partial \varepsilon_3 - m\varepsilon_2, \\
& a_4 \Rightarrow a_4 + \partial \varepsilon_4 + m\varepsilon_1, \\
& \vec{A}_1 \Rightarrow \vec{A}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1, \\
& \vec{A}_2 \Rightarrow \vec{A}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2, \\
& \vec{A}_3 \Rightarrow \vec{A}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3, \\
& \vec{A}_4 \Rightarrow \vec{A}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{10.11}
$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 являются произвольными скалярными функциями, удовлетворяющими однородному волновому уравнению Клейна-Гордона. Принимая во внимание (10.10) мы имеем

$$
\begin{aligned}
& \left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4\right) \\
& = -g_1 + ig_2\mathbf{e_{tr}} + ig_3\mathbf{e_t} - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_3\mathbf{e_r} + \vec{G}_4\mathbf{e_t},
\end{aligned}
\tag{10.12}
$$

и исходное волновое уравнение (10.5) принимает следующий вид:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(-g_1+ig_2\mathbf{e_{tr}}+ig_3\mathbf{e_t}-ig_4\mathbf{e_r}+\vec{G}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{G}_2+\vec{G}_3\mathbf{e_r}+\vec{G}_4\mathbf{e_t}\right)$$
$$=-i\rho_1\mathbf{e_t}+i\rho_2\mathbf{e_r}-\rho_3+i\rho_4\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_1\mathbf{e_r}-\vec{j}_2\mathbf{e_t}+\vec{j}_3\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_4 i. \tag{10.13}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (10.13) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем систему уравнений для напряженностей поля аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$\begin{aligned}
&\partial g_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_1\right)-mg_4=\rho_1\ ,\\
&\partial g_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_2\right)+mg_3=\rho_2,\\
&\partial g_3+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_3\right)-mg_2=\rho_3,\\
&\partial g_4+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right)+mg_1=\rho_4,\\
&\partial\vec{G}_1+\vec{\nabla}g_1+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_2\right]+m\vec{G}_4=-\vec{j}_1,\\
&\partial\vec{G}_2+\vec{\nabla}g_2-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_1\right]-m\vec{G}_3=-\vec{j}_2,\\
&\partial\vec{G}_3+\vec{\nabla}g_3-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right]+m\vec{G}_2=-\vec{j}_3,\\
&\partial\vec{G}_4+\vec{\nabla}g_4+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_3\right]-m\vec{G}_1=-\vec{j}_4.
\end{aligned} \tag{10.14}$$

Уравнения (10.14) инвариантны по отношению к следующим подстановкам:

$$\begin{aligned}
&g_1\Rightarrow g_1+\partial\varepsilon_1-m\varepsilon_4,\\
&g_2\Rightarrow g_2-\partial\varepsilon_2-m\varepsilon_3,\\
&g_3\Rightarrow g_3+\partial\varepsilon_3-m\varepsilon_2,\\
&g_4\Rightarrow g_4-\partial\varepsilon_4-m\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_1\Rightarrow\vec{G}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_2\Rightarrow\vec{G}_2+\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{G}_3\Rightarrow\vec{G}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{G}_4\Rightarrow\vec{G}_4+\vec{\nabla}\varepsilon_4,
\end{aligned} \tag{10.15}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (10.14) на соответствующие напряженности поля и складывая, мы получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2+\vec{G}_1^2+\vec{G}_2^2+\vec{G}_3^2+\vec{G}_4^2\right)\\
&+g_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_1\right)+g_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_2\right)+g_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_3\right)+g_4\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right)\\
&+\left(\vec{G}_1\cdot\vec{\nabla}g_1\right)+\left(\vec{G}_2\cdot\vec{\nabla}g_2\right)+\left(\vec{G}_3\cdot\vec{\nabla}g_3\right)+\left(\vec{G}_4\cdot\vec{\nabla}g_4\right)\\
&+i\left(\vec{G}_1\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_2\right]\right)-i\left(\vec{G}_2\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_1\right]\right)-i\left(\vec{G}_3\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right]\right)+i\left(\vec{G}_4\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_3\right]\right)\\
&=g_1\rho_1+g_2\rho_2+g_3\rho_3+g_4\rho_4-\left(\vec{G}_1\cdot\vec{j}_1\right)-\left(\vec{G}_2\cdot\vec{j}_2\right)-\left(\vec{G}_3\cdot\vec{j}_3\right)-\left(\vec{G}_4\cdot\vec{j}_4\right).
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для массивного поля. Член

$$
w=\frac{1}{8\pi}\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2+\vec{G}_1^2+\vec{G}_2^2+\vec{G}_3^2+\vec{G}_4^2\right) \tag{10.17}
$$

играет роль плотности энергии поля, в то время как член

$$
\vec{p}=\frac{c}{4\pi}\left(g_1\vec{G}_1+g_2\vec{G}_2+g_3\vec{G}_3+g_4\vec{G}_4-i\left[\vec{G}_1\times\vec{G}_2\right]+i\left[\vec{G}_3\times\vec{G}_4\right]\right) \tag{10.18}
$$

играет роль плотности потока энергии.

С другой стороны, применяя оператор $\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)$ к уравнению (10.13), мы получаем следующее волновое уравнение для напряженностей поля:

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\\
&\times\left(-g_1+ig_2\mathbf{e_{tr}}+ig_3\mathbf{e_t}-ig_4\mathbf{e_r}+\vec{G}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{G}_2+\vec{G}_3\mathbf{e_r}+\vec{G}_4\mathbf{e_t}\right)\\
&=\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\\
&\times\left(-i\rho_1\mathbf{e_t}+i\rho_2\mathbf{e_r}-\rho_3+i\rho_4\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_1\mathbf{e_r}-\vec{j}_2\mathbf{e_t}+\vec{j}_3\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_4 i\right).
\end{aligned}
\tag{10.19}
$$

Разделяя члены с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующее волновое уравнение для напряженностей поля g_S и $\vec{G}_S$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_1=-\,\partial\rho_1-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_1\right)-m\rho_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_2=-\partial\rho_2-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_2\right)+m\rho_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_3=-\partial\rho_3-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_3\right)-m\rho_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_4=-\partial\rho_4-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_4\right)+m\rho_1,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_1=\vec{\nabla}\rho_1+\partial\vec{j}_1-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_2\right]-m\vec{j}_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_2=\vec{\nabla}\rho_2+\partial\vec{j}_2+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_1\right]+m\vec{j}_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_3=\vec{\nabla}\rho_3+\partial\vec{j}_3+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_4\right]-m\vec{j}_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_4=\vec{\nabla}\rho_4+\partial\vec{j}_4-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_3\right]+m\vec{j}_1.
\end{aligned}
\tag{10.20}
$$

Нетрудно проверит, что уравнение (10.20) инвариантно по отношению к следующим подстановкам:

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\Rightarrow\rho_1+\partial\varepsilon_1-m\varepsilon_4,\\
&\rho_2\Rightarrow\rho_2+\partial\varepsilon_2+m\varepsilon_3,\\
&\rho_3\Rightarrow\rho_3+\partial\varepsilon_3-m\varepsilon_2,\\
&\rho_4\Rightarrow\rho_4+\partial\varepsilon_4+m\varepsilon_1,\\
&\vec{j}_1\Rightarrow\vec{j}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{j}_2\Rightarrow\vec{j}_2-\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{j}_3\Rightarrow\vec{j}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{j}_4\Rightarrow\vec{j}_4-\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{10.21}
$$

В качестве примера рассмотрим поля создаваемые источниками одного типа ρ_1 и $\vec{j}_1$. В этом случае массивное поле описывается потенциалами a_1 и $\vec{A}_1$:

$$
\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}=ia_1\mathbf{e}_{\mathbf{t}}+\vec{A}_1\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\,. \tag{10.22}
$$

Тогда мы имеем только следующие отличные от нуля напряженности поля:

$$
\begin{aligned}
&g_1 = \partial a_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1\right), \\
&g_4 = -m a_1, \\
&\vec{G}_1 = -\partial \vec{A}_1 - \vec{\nabla} a_1, \\
&\vec{G}_2 = -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right], \\
&\vec{G}_4 = -m\vec{A}_1,
\end{aligned}
\tag{10.23}
$$

и волновое уравнение (10.13) принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(-g_1 - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_4\mathbf{e_t}\right) \\
&= -i\rho_1\mathbf{e_t} - \vec{j}_1\mathbf{e_r}.
\end{aligned}
\tag{10.24}
$$

Тогда система уравнений (10.14) может быть переписана в виде

$$
\begin{aligned}
&\partial g_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_1\right) - m g_4 = \rho_1 , \\
&\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_2\right) = 0, \\
&\partial g_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_4\right) + m g_1 = 0, \\
&\partial \vec{G}_1 + \vec{\nabla} g_1 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{G}_2\right] + m\vec{G}_4 = -\vec{j}_1, \\
&\partial \vec{G}_2 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{G}_1\right] = 0, \\
&-i\left[\vec{\nabla} \times \vec{G}_4\right] + m\vec{G}_2 = 0, \\
&\partial \vec{G}_4 + \vec{\nabla} g_4 - m\vec{G}_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{10.25}
$$

Система (10.25) является аналогом уравнений Прока-Максвелла. Кроме того, мы имеем следующую систему волновых уравнений для напряженностей поля:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) g_1 = \partial\rho_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_1\right), \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) g_4 = -m\rho_1, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{G}_1 = -\vec{\nabla}\rho_1 - \partial\vec{j}_1, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{G}_2 = -i\left[\vec{\nabla} \times \vec{j}_1\right], \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{G}_4 = -m\vec{j}_1.
\end{aligned}
\tag{10.26}
$$

Подразумевая сохранение заряда

$$\partial\rho_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_1\right) = 0\,, \qquad (10.27)$$

мы можем выбрать скалярное поле g_1 равным нулю. Это эквивалентно следующему калибровочному условию:

$$\partial a_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1\right) = 0\,, \qquad (10.28)$$

совпадающему с калибровкой Лоренца в электродинамике.

10.2. Уравнение второго порядка для безмассового поля

В случае безмассового поля волновое уравнение (10.5) принимает следующую форму:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{0}\,, \qquad (10.29)$$

где потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ и источник $\tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{0}$ безмассового поля (индекс **0**) могут быть выбраны в форме (10.7) и (10.8) как прежде

$$\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = ib_1\mathbf{e_t} - ib_2\mathbf{e_r} + b_3 - ib_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e_r} + \vec{B}_2\mathbf{e_t} - \vec{B}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{B}_4\,, \qquad (10.30)$$

$$\tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{0} = -i\beta_1\mathbf{e_t} + i\beta_2\mathbf{e_r} - \beta_3 + i\beta_4\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_1\mathbf{e_r} - \vec{l}_2\mathbf{e_t} + \vec{l}_3\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_4 i\,, \qquad (10.31)$$

где $\beta_\mathrm{S} = 4\pi\beta'_\mathrm{S}$ (β'_S - объемные плотности зарядов) и $\vec{l}_\mathrm{S} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{l}'_\mathrm{S}$ ($\vec{l}'_\mathrm{S}$ - объемные плотности токов). Введем скалярные и векторные напряженности поля, согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
&h_1 = \partial b_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_1\right),\\
&h_2 = \partial b_2 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_2\right),\\
&h_3 = \partial b_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_3\right),\\
&h_4 = \partial b_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_4\right)_1,\\
&\vec{H}_1 = -\partial \vec{B}_1 - \vec{\nabla} b_1 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}_2\right],\\
&\vec{H}_2 = -\partial \vec{B}_2 - \vec{\nabla} b_2 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}_1\right],\\
&\vec{H}_3 = -\partial \vec{B}_3 - \vec{\nabla} b_3 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}_4\right],\\
&\vec{H}_4 = -\partial \vec{B}_4 - \vec{\nabla} b_4 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{B}_3\right].
\end{aligned}
\tag{10.32}
$$

Заметим, что определения (10.32) инвариантны по отношению к следующим подстановкам:

$$
\begin{aligned}
&b_1 \Rightarrow b_1 + \partial \varepsilon_1,\\
&b_2 \Rightarrow b_2 + \partial \varepsilon_2,\\
&b_3 \Rightarrow b_3 + \partial \varepsilon_3,\\
&b_4 \Rightarrow b_4 + \partial \varepsilon_4,\\
&\vec{B}_1 \Rightarrow \vec{B}_1 - \vec{\nabla} \varepsilon_1,\\
&\vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B}_2 - \vec{\nabla} \varepsilon_2,\\
&\vec{B}_3 \Rightarrow \vec{B}_3 - \vec{\nabla} \varepsilon_3,\\
&\vec{B}_4 \Rightarrow \vec{B}_4 - \vec{\nabla} \varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{10.33}
$$

Принимая во внимание (10.32) получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(ib_1\mathbf{e}_{\mathbf{t}} - ib_2\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + b_3 - ib_4\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{B}_2\mathbf{e}_{\mathbf{t}} - \vec{B}_3\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} + i\vec{B}_4\right)\\
&= -h_1 + ih_2\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} + ih_3\mathbf{e}_{\mathbf{t}} - ih_4\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{H}_1\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} - i\vec{H}_2 + \vec{H}_3\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{H}_4\mathbf{e}_{\mathbf{t}},
\end{aligned}
\tag{10.34}
$$

и волновое уравнение (10.27) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned}&\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(-h_1+ih_2\mathbf{e_{tr}}+ih_3\mathbf{e_t}-ih_4\mathbf{e_r}+\vec{H}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{H}_2+\vec{H}_3\mathbf{e_r}+\vec{H}_4\mathbf{e_t}\right)\\&=-i\beta_1\mathbf{e_t}+i\beta_2\mathbf{e_r}-\beta_3+i\beta_4\mathbf{e_{tr}}-\vec{l}_1\mathbf{e_r}-\vec{l}_2\mathbf{e_t}+\vec{l}_3\mathbf{e_{tr}}-\vec{l}_4 i.\end{aligned}\tag{10.35}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (10.35) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем две независимых системы уравнений для напряженностей поля, аналогичных системе уравнений Максвелла в электродинамике. Первая система

$$\begin{aligned}&\partial h_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right)=\beta_1\ ,\\&\partial h_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right)=\beta_2,\\&\partial\vec{H}_1+\vec{\nabla}h_1+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]=-\vec{l}_1,\\&\partial\vec{H}_2+\vec{\nabla}h_2-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]=-\vec{l}_2.\end{aligned}\tag{10.36}$$

Эта система инвариантна по отношению к следующим подстановкам:

$$\begin{aligned}&h_1\Rightarrow h_1+\partial\varepsilon_1,\\&h_2\Rightarrow h_2-\partial\varepsilon_2,\\&\vec{H}_1\Rightarrow\vec{H}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\&\vec{H}_2\Rightarrow\vec{H}_2+\vec{\nabla}\varepsilon_2.\end{aligned}\tag{10.37}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (10.36) на соответствующую напряженность поля и складывая все уравнения, получаем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\partial\left(h_1^2+h_2^2+\vec{H}_1^2+\vec{H}_2^2\right)\\&+h_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right)+h_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right)\\&+\left(\vec{H}_1\cdot\vec{\nabla}h_1\right)+\left(\vec{H}_2\cdot\vec{\nabla}h_2\right)\\&+i\left(\vec{H}_1\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]\right)-i\left(\vec{H}_2\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]\right)\\&=h_1\beta_1+h_2\beta_2-\left(\vec{H}_1\cdot\vec{l}_1\right)-\left(\vec{H}_2\cdot\vec{l}_2\right).\end{aligned}\tag{10.38}$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для безмассового поля первого типа. Член

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(h_1^2 + h_2^2 + \vec{H}_1^2 + \vec{H}_2^2\right) \tag{10.39}$$

играет роль объемной плотности энергии поля, в то время как член

$$\vec{p} = \frac{c}{4\pi}\left(h_1\vec{H}_1 + h_2\vec{H}_2 - i\left[\vec{H}_1 \times \vec{H}_2\right]\right) \tag{10.40}$$

играет роль объемной плотности потока энергии.

Вторая система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\partial h_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_3\right) = \beta_3, \\
&\partial h_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_4\right) = \beta_4, \\
&\partial \vec{H}_3 + \vec{\nabla} h_3 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_4\right] = -\vec{l}_3, \\
&\partial \vec{H}_4 + \vec{\nabla} h_4 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_3\right] = -\vec{l}_4.
\end{aligned} \tag{10.41}$$

Эта система инвариантна по отношению к следующим подстановкам:

$$\begin{aligned}
&h_3 \Rightarrow h_3 + \partial \varepsilon_3, \\
&h_4 \Rightarrow h_4 - \partial \varepsilon_4, \\
&\vec{H}_3 \Rightarrow \vec{H}_3 - \vec{\nabla} \varepsilon_3, \\
&\vec{H}_4 \Rightarrow \vec{H}_4 + \vec{\nabla} \varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{10.42}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (10.41) на соответствующую напряженность поля и складывая все уравнения, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(h_3^2 + h_4^2 + \vec{H}_3^2 + \vec{H}_4^2\right) \\
&+h_3\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_3\right) + h_4\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}_4\right) \\
&+\left(\vec{H}_3 \cdot \vec{\nabla} h_3\right) + \left(\vec{H}_4 \cdot \vec{\nabla} h_4\right) \\
&+i\left(\vec{H}_3 \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_4\right]\right) - i\left(\vec{H}_4 \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}_3\right]\right) \\
&= h_3\beta_3 + h_4\beta_4 - \left(\vec{H}_3 \cdot \vec{l}_3\right) - \left(\vec{H}_4 \cdot \vec{l}_4\right).
\end{aligned} \tag{10.43}$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для безмассового поля второго типа. Член

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(h_3^2 + h_4^2 + \vec{H}_3^2 + \vec{H}_4^2\right) \tag{10.44}$$

играет роль объемной плотности энергии поля, в то время как член

$$\vec{p} = \frac{c}{4\pi}\left(h_3\vec{H}_3 + h_4\vec{H}_4 - i\left[\vec{H}_3 \times \vec{H}_4\right]\right) \tag{10.45}$$

играет роль объемной плотности потока энергии.

Соответственно, волновые уравнения для напряженностей безмассового поля также распадаются на две независимых системы. Первая система объединяет потенциалы и источники, преобразующиеся в соответствии с преобразованиями Лоренца первого типа (см. (2.10)):

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_1 = -\,\partial\beta_1 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_1\right),\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_2 = -\partial\beta_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_2\right),\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_1 = \vec{\nabla}\beta_1 + \partial\vec{l}_1 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_2\right],\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_2 = \vec{\nabla}\beta_2 + \partial\vec{l}_2 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_1\right].
\end{aligned} \tag{10.46}$$

Вторая система объединяет потенциалы и источники, преобразующиеся в соответствии с преобразованиями Лоренца второго типа (см. (2.10)):

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_3 = -\partial\beta_3 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_3\right),\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_4 = -\partial\beta_4 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_4\right),\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_3 = \vec{\nabla}\beta_3 + \partial\vec{l}_3 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_4\right],\\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_4 = \vec{\nabla}\beta_4 + \partial\vec{l}_4 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_3\right].
\end{aligned} \tag{10.47}$$

Уравнения (10.46) и (10.47) инвариантны по отношению к подстановкам

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 \Rightarrow \beta_1 + \partial\varepsilon_1,\\
&\beta_2 \Rightarrow \beta_2 + \partial\varepsilon_2,\\
&\beta_3 \Rightarrow \beta_3 + \partial\varepsilon_3,\\
&\beta_4 \Rightarrow \beta_4 + \partial\varepsilon_4,\\
&\vec{l}_1 \Rightarrow \vec{l}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{l}_2 \Rightarrow \vec{l}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{l}_3 \Rightarrow \vec{l}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{l}_4 \Rightarrow \vec{l}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{10.48}
$$

Система уравнений (10.36) соответствует обычной системе уравнений Максвелла. Покажем это. Если мы предположим сохранение зарядов

$$
\begin{aligned}
&\partial\beta_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_1\right) = 0,\\
&\partial\beta_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_2\right) = 0,
\end{aligned}
\tag{10.49}
$$

то, как это следует из (10.46), мы можем выбрать скалярные напряженности поля h_1 и h_2 равными нулю, и тогда получаем следующую систему:

$$
\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right) = \beta_1,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right) = \beta_2,\\
&\partial\vec{H}_1 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right] = -\vec{l}_1,\\
&\partial\vec{H}_2 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right] = -\vec{l}_2.
\end{aligned}
\tag{10.50}
$$

Здесь $\vec{H}_1$ является напряженностью электрического поля; $\vec{H}_2$ является напряженностью магнитного поля; β_1 - объемная плотность электрического заряда; β_2 - объемная плотность магнитного заряда; $\vec{l}_1$ - объемная плотность электрического тока; $\vec{l}_2$ - объемная плотность магнитного тока. Принимая во внимание экспериментальный факт, что в нашей части вселенной нет магнитных зарядов и токов, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right)=\beta_1,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right)=0,\\
&\partial\vec{H}_1+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]=-\vec{l}_1,\\
&\partial\vec{H}_2-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]=0,
\end{aligned} \tag{10.51}$$

которая совпадает с общепринятой системой уравнений Максвелла.

10.3. Уравнение первого порядка для массивного поля

Рассмотрим массивное поле, описываемое седеонным уравнением первого порядка

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m}=\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}\,.. \tag{10.52}$$

Здесь $\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}$ - феноменологический источник поля, который может быть выбран в следующей седеонной форме:

$$\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}=-d_1+id_2\mathbf{e_{tr}}+id_3\mathbf{e_t}-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{f}_2+\vec{f}_3\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t} \tag{10.53}$$

где $d_k=4\pi d_k'$ (d_k' - объемные плотности зарядов) и $\vec{f}_k=\dfrac{4\pi}{c}\vec{f}_k'$ ($\vec{f}_k'$- объемные плотности токов). Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m}$ в форме (10.7) мы можем переписать уравнение (10.52) в следующей развернутой форме:

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(ia_1\mathbf{e_t}-ia_2\mathbf{e_r}+a_3-ia_4\mathbf{e_{tr}}+\vec{A}_1\mathbf{e_r}+\vec{A}_2\mathbf{e_t}-\vec{A}_3\mathbf{e_{tr}}+i\vec{A}_4\right)\\
&=-d_1+id_2\mathbf{e_{tr}}+id_3\mathbf{e_t}-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{f}_2+\vec{f}_3\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t}.
\end{aligned} \tag{10.54}$$

Это седеонное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\partial a_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1\right) + m a_4 = d_1, \\
&\partial a_2 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2\right) - m a_3 = d_2, \\
&\partial a_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_3\right) + m a_2 = d_3, \\
&\partial a_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_4\right) - m a_1 = d_4, \\
&-\partial \vec{A}_1 - \vec{\nabla} a_1 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_2\right] + m\vec{A}_4 = \vec{f}_1, \\
&-\partial \vec{A}_2 - \vec{\nabla} a_2 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right] - m\vec{A}_3 = \vec{f}_2, \\
&-\partial \vec{A}_3 - \vec{\nabla} a_3 - i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_4\right] + m\vec{A}_2 = \vec{f}_3, \\
&-\partial \vec{A}_4 - \vec{\nabla} a_4 + i\left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_3\right] - m\vec{A}_1 = \vec{f}_4.
\end{aligned}
\tag{10.55}
$$

С другой стороны, вводя напряженности массивного поля в соответствии с определениями (10.10) мы получаем

$$
\begin{aligned}
&-g_1 + ig_2\mathbf{e_{tr}} + ig_3\mathbf{e_t} - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_3\mathbf{e_r} + \vec{G}_4\mathbf{e_t} \\
&= -d_1 + id_2\mathbf{e_{tr}} + id_3\mathbf{e_t} - id_4\mathbf{e_r} + \vec{f}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{f}_2 + \vec{f}_3\mathbf{e_r} + \vec{f}_4\mathbf{e_t}.
\end{aligned}
\tag{10.56}
$$

Это означает, что напряженности поля не равны нулю только в области источников.

Применяя оператор $\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)$ к уравнению (10.54), мы получаем волновое уравнение второго порядка

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right) \\
&\times\left(ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4\right) \\
&= \left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right) \\
&\times\left(-d_1 + id_2\mathbf{e_{tr}} + id_3\mathbf{e_t} - id_4\mathbf{e_r} + \vec{f}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{f}_2 + \vec{f}_3\mathbf{e_r} + \vec{f}_4\mathbf{e_t}\right),
\end{aligned}
\tag{10.57}
$$

которое эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)a_1=\partial d_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_1\right)-md_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)a_2=\partial d_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_2\right)+md_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)a_3=\partial d_3+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_3\right)-md_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)a_4=\partial d_4+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_4\right)+md_1,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{A}_1=-\partial\vec{f}_1-\vec{\nabla}d_1-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{f}_2\right]-m\vec{f}_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{A}_2=-\partial\vec{f}_2-\vec{\nabla}d_2+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{f}_1\right]+m\vec{f}_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{A}_3=-\partial\vec{f}_3-\vec{\nabla}d_3+i\left[\vec{\nabla}\times\vec{f}_4\right]-m\vec{f}_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{A}_4=-\partial\vec{f}_4-\vec{\nabla}d_4-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{f}_3\right]+m\vec{f}_1.
\end{aligned}
\tag{10.58}
$$

Система уравнений (10.58) инвариантна по отношению к следующим подстановкам для источников поля:

$$
\begin{aligned}
&d_1\Rightarrow d_1+\partial\varepsilon_1+m\varepsilon_4,\\
&d_2\Rightarrow d_2+\partial\varepsilon_2-m\varepsilon_3,\\
&d_3\Rightarrow d_3+\partial\varepsilon_3+m\varepsilon_2,\\
&d_4\Rightarrow d_4+\partial\varepsilon_4-m\varepsilon_1,\\
&\vec{f}_1\Rightarrow\vec{f}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{f}_2\Rightarrow\vec{j}_2-\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{f}_3\Rightarrow\vec{f}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{f}_4\Rightarrow\vec{f}_4-\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{10.59}
$$

В качестве примера рассмотрим поля создаваемые источниками одного типа d_4 и $\vec{f}_4$:

$$
\tilde{\mathbf{I}}_{\mathbf{m}}=-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t}\,,
\tag{10.60}
$$

В этом случае уравнение (10.56) переписывается как

$$
-ig_4\mathbf{e_r}+\vec{G}_4\mathbf{e_t}=-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t}\,.
\tag{10.61}
$$

Применяя оператор $\left(i\mathbf{e_1}\partial-\mathbf{e_2}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_3}m\right)$ к уравнению (10.6) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами мы получаем следующие уравнения для напряженностей поля:

$$
\begin{gathered}
g_4 = d_4, \\
\vec{G}_4 = \vec{f}_4, \\
\partial g_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right) = \partial d_4 + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_4\right), \\
\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right] = \left[\vec{\nabla}\times\vec{f}_4\right], \\
\partial\,\vec{G}_4 + \vec{\nabla}g_4 = \partial\vec{f}_4 + \vec{\nabla}d_4.
\end{gathered}
\tag{10.62}
$$

Подразумевая сохранение заряда

$$
\partial d_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{f}_4\right) = 0, \qquad (10.63
$$

мы имеем следующее калибровочное условие:

$$
\partial g_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right) = 0, \qquad (10.64
$$

которое аналогично калибровке Лоренца, но только в данном случае записано для напряженностей поля.

10.4. Уравнение первого порядка для безмассового поля

В случае безмассового поля волновое уравнение первого порядка записывается следующим образом:

$$
\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0}, \tag{10.67}
$$

где потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ и феноменологический источник $\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0}$ имеют следующий вид:

$$
\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = ib_1\mathbf{e_t} - ib_2\mathbf{e_r} + b_3 - ib_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e_r} + \vec{B}_2\mathbf{e_t} - \vec{B}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{B}_4, \tag{10.68}
$$

$$
\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0} = -\upsilon_1 + i\upsilon_2\mathbf{e_{tr}} + i\upsilon_3\mathbf{e_t} - i\upsilon_4\mathbf{e_r} + \vec{\gamma}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{\gamma}_2 + \vec{\gamma}_3\mathbf{e_r} + \vec{\gamma}_4\mathbf{e_t}\,. \tag{10.69}
$$

Здесь $\upsilon_\mathrm{S} = 4\pi\upsilon'_\mathrm{S}$ (υ'_S - объемные плотности зарядов) и $\vec{\gamma}_\mathrm{S} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{\gamma}'_\mathrm{S}$ ($\vec{\gamma}'_\mathrm{S}$ - объемные плотности токов). Уравнение (10.67) эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\partial b_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1\right) = \upsilon_1,\\
&\partial b_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_2\right) = \upsilon_2,\\
&\partial b_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_3\right) = \upsilon_3,\\
&\partial b_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_4\right) = \upsilon_4,\\
&-\partial\vec{B}_1 - \vec{\nabla}b_1 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_2\right] = \vec{\gamma}_1,\\
&-\partial\vec{B}_2 - \vec{\nabla}b_2 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right] = \vec{\gamma}_2,\\
&-\partial\vec{B}_3 - \vec{\nabla}b_3 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_4\right] = \vec{\gamma}_3,\\
&-\partial\vec{B}_4 - \vec{\nabla}b_4 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_3\right] = \vec{\gamma}_4.
\end{aligned}
\tag{10.70}
$$

Уравнения (10.70) инвариантны по отношению к подстановкам (10.33).

10.5. Обобщение градиентной инвариантности

Градиентная инвариантность седеонных уравнений, описывающих массивные поля является свойством оператора $\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)$ и может быть обобщена на более широкий класс скалярно-векторных подстановок. Действительно определим оператор $\hat{\hat{\nabla}}$ как

$$\hat{\hat{\nabla}} \equiv \left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right), \tag{10.71}$$

тогда волновое уравнение (10.71) принимает следующую форму:

$$\hat{\hat{\nabla}}\hat{\hat{\nabla}}\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} = \tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{m}. \tag{10.72}$$

Это уравнение не изменяется по действием следующей замены потенциала:

$$\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} \Rightarrow \tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} + \tilde{\mathbf{F}} + \hat{\hat{\nabla}}\tilde{\mathbf{E}}, \tag{10.73}$$

где $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ произвольные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\hat{\hat{\nabla}}\tilde{\mathbf{F}} = 0, \tag{10.74}$$

$$\hat{\hat{\nabla}}\hat{\hat{\nabla}}\tilde{\mathbf{E}} = 0\,. \tag{10.75}$$

Условие (10.74) указывает, что потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}$ определяется с точностью до аддитивной функции $\tilde{\mathbf{F}}$, удовлетворяющей однородному волновому уравнению первого порядка, в то время как выражение (10.75) означает, что $\tilde{\mathbf{E}}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению второго порядка. Рассмотрим обобщенное градиентное калибровочное условие. Для потенциала, определенного выражением (10.7), функция $\tilde{\mathbf{E}}$ может быть выбрана следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2\mathbf{e_{tr}} - i\varepsilon_3\mathbf{e_t} + i\varepsilon_4\mathbf{e_r} + \vec{E}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{E}_2 + \vec{E}_3\mathbf{e_r} + \vec{E}_4\mathbf{e_t}, \tag{10.76}$$

где компоненты ε_{S} и $\vec{E}_{\mathrm{S}}$ являются произвольными функциями координат и времени. Тогда замена (10.73) приводит к следующей системе подстановок:

$$\begin{aligned}
a_1 &\Rightarrow a_1 + \partial\varepsilon_1 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1\right) - m\varepsilon_4,\\
a_2 &\Rightarrow a_2 + \partial\varepsilon_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2\right) + m\varepsilon_3,\\
a_3 &\Rightarrow a_3 + \partial\varepsilon_3 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3\right) - m\varepsilon_2,\\
a_4 &\Rightarrow a_4 + \partial\varepsilon_4 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_4\right) + m\varepsilon_1,\\
\vec{A}_1 &\Rightarrow \vec{A}_1 + \partial\vec{E}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_2\right] + m\vec{E}_4,\\
\vec{A}_2 &\Rightarrow \vec{A}_2 + \partial\vec{E}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_1\right] - m\vec{E}_3,\\
\vec{A}_3 &\Rightarrow \vec{A}_3 + \partial\vec{E}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3 - i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_4\right] + m\vec{E}_2,\\
\vec{A}_4 &\Rightarrow \vec{A}_4 + \partial\vec{E}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_3\right] - m\vec{E}_1.
\end{aligned} \tag{10.77}$$

Если мы выберем векторную часть равной нулю ($\vec{E}_{\mathrm{S}} = 0$), тогда подстановки (10.77) переходят в (10.11), а если дополнительно положить массу кванта равной нулю ($m = 0$), то подстановки (10.77) переходят в систему (10.33) для безмассового поля. Аналогично подстановки для напряженностей поля имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&g_1 \Rightarrow g_1 + \partial\varepsilon_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1\right) - m\varepsilon_4,\\
&g_2 \Rightarrow g_2 - \partial\varepsilon_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2\right) - m\varepsilon_3,\\
&g_3 \Rightarrow g_3 + \partial\varepsilon_3 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3\right) - m\varepsilon_2,\\
&g_3 \Rightarrow g_3 - \partial\varepsilon_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_4\right) - m\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_1 \Rightarrow \vec{G}_1 - \partial\vec{E}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_2\right] + m\vec{E}_4,\\
&\vec{G}_2 \Rightarrow \vec{G}_2 + \partial\vec{E}_2 + \vec{\nabla}\varepsilon_2 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_1\right] + m\vec{E}_3,\\
&\vec{G}_3 \Rightarrow \vec{G}_3 + \partial\vec{E}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_4\right] - m\vec{E}_2,\\
&\vec{G}_4 \Rightarrow \vec{G}_4 - \partial\vec{E}_4 + \vec{\nabla}\varepsilon_4 + i\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_3\right] - m\vec{E}_1.
\end{aligned}
\tag{10.78}
$$

Если мы выберем векторную часть равной нулю, тогда (10.78) переходят в (10.15) и в случае нулевой массы кванта поля в системы (10.37) и (10.42) для безмассового поля.

10.6. Заключение

Таким образом, мы представили суперсимметричные скалярно-векторные уравнения для массивных и безмассовых полей. Продемонстрирована калибровочная инвариантность потенциалов, описываемых волновыми уравнениями первого и второго порядка, а также для напряженностей полей, описываемых системами уравнений аналогичных уравнениям Максвелла.

Приложение 1. Матричное представление седеонов

Рассмотрим матричное представление седеонов. В общем виде седеон представляет собой матрицу размером 16 × 16. Работа с такой матрицей крайне затруднена из-за ее большой размерности. Однако для данной матрицы возможны компактные представления в виде блочных матриц размером 4 × 4. Рассмотрим седеон $\tilde{\mathbf{V}}$, записанный в базисе $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0}\overline{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{e_1}\overline{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e_2}\overline{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{e_3}\overline{\mathbf{V}}_3 . \qquad (\text{П } 1.1)$$

Седеонное произведение элемента $\mathbf{e_1}$ и седеона $\tilde{\mathbf{V}}$ равно

$$\mathbf{e_1}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0}\overline{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e_1}\overline{\mathbf{V}}_0 - i\mathbf{e_2}\overline{\mathbf{V}}_3 + i\mathbf{e_3}\overline{\mathbf{V}}_2 , \qquad (\text{П } 1.1)$$

и поэтому седеонная единица $\mathbf{e_1}$ может быть представлена следующей матрицей:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.3)$$

По аналогии имеем:

$$\mathbf{e_0} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.4)$$

Таким образом, используя (П 1.3) и (П 1.4), мы можем переписать седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ (в базисе $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$) в следующей матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{V}}_0 & \overline{\mathbf{V}}_1 & \overline{\mathbf{V}}_2 & \overline{\mathbf{V}}_3 \\ \overline{\mathbf{V}}_1 & \overline{\mathbf{V}}_0 & -i\overline{\mathbf{V}}_3 & i\overline{\mathbf{V}}_2 \\ \overline{\mathbf{V}}_2 & i\overline{\mathbf{V}}_3 & \overline{\mathbf{V}}_0 & -i\overline{\mathbf{V}}_1 \\ \overline{\mathbf{V}}_3 & -i\overline{\mathbf{V}}V_2 & i\overline{\mathbf{V}}_1 & \overline{\mathbf{V}}_0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.5)$$

С другой стороны, седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ записывается в базисе $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ в следующей скалярно-векторной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_0\mathbf{a_0} + \mathbf{V}_1\mathbf{a_1} + \mathbf{V}_2\mathbf{a_2} + \mathbf{V}_3\mathbf{a_3} . \qquad (\text{П } 1.6)$$

Тогда, действуя аналогичным образом, мы получаем, что базисные элементы $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ имеют следующее матричное представление:

$$\mathbf{a_0} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.7)$$

Используя (П 1.7), седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ можно записать в базисе $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ в виде следующей матрицы размерности 4×4 :

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_0 & -i\mathbf{V}_3 & i\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 & i\mathbf{V}_3 & \mathbf{V}_0 & -i\mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_3 & -i\mathbf{V}_2 & i\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.8)$$

Таким образом, шестнадцатикомпонентный седеон может быть представлен в виде матрицы 16×16, которая допускает два различных компактных представления в виде блочных матриц 4×4. Первое представление в базисе $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ дается выражением (П 1.5) с компонентами $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ (в базисе $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$), равными

$$\bar{\mathbf{V}}_\alpha = \begin{pmatrix} V_{\alpha 0} & V_{\alpha 1} & V_{\alpha 2} & V_{\alpha 3} \\ V_{\alpha 1} & V_{\alpha 0} & -iV_{\alpha 3} & iV_{\alpha 2} \\ V_{\alpha 2} & iV_{\alpha 3} & V_{\alpha 0} & -iV_{\alpha 1} \\ V_{\alpha 3} & -iV_{\alpha 2} & iV_{\alpha 1} & V_{\alpha 0} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.9)$$

Второе представление в базисе $\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ дается выражением (П 1.8) с компонентами $\mathbf{V}_\beta$ (в базисе $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$), равными

$$\mathbf{V}_\beta = \begin{pmatrix} V_{0\beta} & V_{1\beta} & V_{2\beta} & V_{3\beta} \\ V_{1\beta} & V_{0\beta} & -iV_{3\beta} & iV_{2\beta} \\ V_{2\beta} & iV_{3\beta} & V_{0\beta} & -iV_{1\beta} \\ V_{3\beta} & -iV_{2\beta} & iV_{1\beta} & V_{0\beta} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.10)$$

Рассмотрим соотношения между элементами векторного базиса $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ и матрицами Дирака. Вводя новые величины

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_3), \ \mathbf{W}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2),$$

$$\mathbf{W}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 - i\mathbf{V}_2), \ \mathbf{W}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_3), \qquad (\text{П } 1.11)$$

мы можем переписать седеон (П 1.6) в базисе собственных функций оператора $\mathbf{a_3}$ в следующей форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_1(1+\mathbf{a_3}) + \mathbf{W}_2(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_4(1-\mathbf{a_3}), \qquad (\text{П } 1.12)$$

где величины

$$(1+\mathbf{a_3}), \ (\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}), \ (\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}), \ (1-\mathbf{a_3}) \qquad (\text{П } 1.13)$$

представляют собой новый седеонный базис. Тогда действие векторных операторов $\mathbf{a_m}$ сводится к следующим выражениям:

$$\mathbf{a_1}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_2(1+\mathbf{a_3}) + \mathbf{W}_1(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_4(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(1-\mathbf{a_3}),$$

$$\mathbf{a_2}\tilde{\mathbf{V}} = -i\mathbf{W}_2(1+\mathbf{a_3}) + i\mathbf{W}_1(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) - i\mathbf{W}_4(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + i\mathbf{W}_3(1-\mathbf{a_3}), \qquad (\text{П } 1.14)$$

$$\mathbf{a_3}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_1(1+\mathbf{a_3}) - \mathbf{W}_2(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) - \mathbf{W}_4(1-\mathbf{a_3}).$$

На основании формул (П 1.14) единичные вектора $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ могут быть представлены в базисе (П 1.13) матрицами 4×4 следующего вида:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\text{П } 1.15)$$

которые совпадают со спиновыми операторами теории Дирака [27]:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.16)$$

Таким образом, матричные операторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{a}_\beta$, вообще говоря, представляются матрицами 16×16. Представление их матрицами 4×4 относится лишь к конкретным базисам и может быть использовано только в тех случаях, когда операторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{a}_\beta$ действуют раздельно и независимо.

Приложение 2. Пространственно-временные седенионы

Известные в литературе шестнадцатикомпонентные гиперкомплексные числа седенионы получаются из восьмикомпонентных октонионов посредством процедуры удвоения Кэли-Диксона [51]. В этом случае гиперкомплексный седенион определяется следующим образом:

$$S = O_1 + O_2 \boldsymbol{e} \,, \qquad \text{(П 2.1)}$$

где O_i является октонионом, а параметр удвоения $\boldsymbol{e}$ аналогичен мнимой единице ($\boldsymbol{e}^2 = -1$). Алгебра седенионов имеет специфические правила умножения. Так, произведение двух седенионов

$$S_1 = O_{11} + O_{12}\boldsymbol{e} \,,$$
$$S_2 = O_{21} + O_{22}\boldsymbol{e}$$

определяется следующим образом:

$$S_1 S_2 = \left(O_{11} + O_{12}\boldsymbol{e}\right)\left(O_{21} + O_{22}\boldsymbol{e}\right) = \left(O_{11}O_{21} - \bar{O}_{22}O_{12}\right) + \left(O_{22}O_{11} + O_{12}\bar{O}_{21}\right)\boldsymbol{e} \,, \qquad \text{(П 2.2)}$$

где $\bar{O}_i$ - сопряженный октонион. Умножение (П 2.2) позволяет ввести хорошо определенную норму седениона, поскольку квадрат седениона равен сумме квадратов его компонент. Однако такая процедура конструирования приводит к тому, что полученные седенионы образуют нормированную, но неассоциативную алгебру [4]. Это существенно усложняет использование седенионов Кэли-Диксона в физических приложениях.

Здесь мы рассмотрим альтернативную версию шестнадцати компонентных гиперкомплексных чисел, называемых “пространственно-временные седенионы” [52], которые образуют ассоциативную алгебру.

П 2.1. Алгебра пространственно-временных седенионов

Как известно, кватернион представляет собой четырех-компонентный объект следующего вида:

$$\hat{q} = q_0\mathbf{a_0} + q_1\mathbf{a_1} + q_2\mathbf{a_2} + q_3\mathbf{a_3} \,, \qquad \text{(П 2.3)}$$

где компоненты $q_\alpha\,(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ - числа (в общем случае комплексные), $\mathbf{a}_0 \equiv 1$ является скалярной единицей, а величины $\mathbf{a}_\mathrm{m}$ $(\mathrm{m} = 1, 2, 3)$ представляют собой кватернионные единицы, которые интерпретируются как единичные векторы. Правила умножения и коммутации кватернионных единиц $\mathbf{a}_\mathrm{m}$ представлены в Таблице 4. По аналогии с седеонами мы введем также пространственно-временной скалярный базис $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, который будет отвечать за пространственно-временные инверсии. Здесь $\mathbf{e}_0 \equiv 1$ - абсолютный скаляр, $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{t}$ - временная скалярная единица, $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{r}$ - пространственная скалярная единица, $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{tr}$ - пространственно-временная скалярная единица. Правила умножения и коммутации пространственно-временных единиц $\mathbf{e}_\mathrm{m}$ выберем также в соответствии с правилами умножения кватернионных единиц (представлены в Таблице 5).

Таблица 4.

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	-1	$\mathbf{a}_3$	$-\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_2$	$-\mathbf{a}_3$	-1	$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_2$	$-\mathbf{a}_1$	-1

Таблица 5.

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

Заметим, что седенионные единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют антикоммутативные алгебры:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{m} &= -\mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{a}_\mathbf{n}, \\ \mathbf{e}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{m} &= -\mathbf{e}_\mathbf{m}\mathbf{e}_\mathbf{n}, \end{aligned} \tag{П 2.4}$$

для $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$. Однако элементы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ коммутируют с элементами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{e}_\mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{m} = \mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{e}_\mathbf{n}, \tag{П 2.5}$$

для любых $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$. Тогда седенион $\tilde{V}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \mathbf{e_0}\left(V_{00}\mathbf{a_0} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\right)\\ &+ \mathbf{e_1}\left(V_{10}\mathbf{a_0} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\right)\\ &+ \mathbf{e_2}\left(V_{20}\mathbf{a_0} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\right)\\ &+ \mathbf{e_3}\left(V_{30}\mathbf{a_0} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\right).\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.6)$$

Также можно ввести седенионные компоненты $V_{\alpha\beta}$ согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}&V = \mathbf{e_0}V_{00}\mathbf{a_0},\\ &\vec{V} = \mathbf{e_0}\left(V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\right),\\ &V_{\mathbf{t}} \equiv V_{\mathbf{1}} = \mathbf{e_1}V_{10}\mathbf{a_0},\\ &\vec{V}_{\mathbf{t}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{1}} = \mathbf{e_1}\left(V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\right),\\ &V_{\mathbf{r}} \equiv V_{\mathbf{2}} = \mathbf{e_2}V_{20}\mathbf{a_0},\\ &\vec{V}_{\mathbf{r}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{2}} = \mathbf{e_2}\left(V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\right),\\ &V_{\mathbf{tr}} \equiv V_{\mathbf{3}} = \mathbf{e_3}V_{30}\mathbf{a_0},\\ &\vec{V}_{\mathbf{tr}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{3}} = \mathbf{e_3}\left(V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\right).\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.7)$$

Тогда седенион представляется в виде

$$\tilde{V} = V + \vec{V} + V_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + V_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + V_{\mathbf{tr}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}}. \qquad (\Pi\ 2.8)$$

Таким образом, пространственно-временная седенионная алгебра также включает в себя четыре группы величин.

- Абсолютные скаляры (V) и абсолютные векторы ($\vec{V}$) не изменяются при пространственной и временной инверсии.
- Временные скаляры ($V_{\mathbf{t}}$) и временные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{t}}$) изменяются (меняют знак) при временной инверсии и не изменяются при пространственной инверсии.
- Пространственные скаляры ($V_{\mathbf{r}}$) и пространственные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{r}}$) изменяются при пространственной инверсии и не изменяются при временной инверсии.
- Пространственно-временные скаляры ($V_{\mathbf{tr}}$) и пространственно-временные векторы ($\vec{V}_{\mathbf{tr}}$) изменяются и при временной и при пространственной инверсии.

Можно ввести скалярно-векторные величины

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{V}}_0 &= V_{00} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_1 &= V_{10} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_2 &= V_{20} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_3 &= V_{30} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\,.
\end{aligned} \qquad (\text{П } 2.9)$$

Тогда седенион записывается в пространственно-временном базисе в следующем виде:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{V}}_0 + \mathbf{e_1}\bar{\boldsymbol{V}}_1 + \mathbf{e_2}\bar{\boldsymbol{V}}_2 + \mathbf{e_3}\bar{\boldsymbol{V}}_3\,. \qquad (\text{П } 2.10)$$

С другой стороны, можно ввести пространственно-временные седенионные скаляры

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_0 &= (V_{00} + \mathbf{e_1}V_{10} + \mathbf{e_2}V_{20} + \mathbf{e_3}V_{30})\,, \\
\boldsymbol{V}_1 &= (V_{01} + \mathbf{e_1}V_{11} + \mathbf{e_2}V_{21} + \mathbf{e_3}V_{31})\,, \\
\boldsymbol{V}_2 &= (V_{02} + \mathbf{e_1}V_{12} + \mathbf{e_2}V_{22} + \mathbf{e_3}V_{32})\,, \\
\boldsymbol{V}_3 &= (V_{03} + \mathbf{e_1}V_{13} + \mathbf{e_2}V_{23} + \mathbf{e_3}V_{33})
\end{aligned} \qquad (\text{П } 2.11)$$

так, что седенион запишется в векторном базисе следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{V}_1\mathbf{a_1} + \boldsymbol{V}_2\mathbf{a_2} + \boldsymbol{V}_3\mathbf{a_3}\,. \qquad (\text{П } 2.12)$$

Или, вводя седенионный вектор

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{V} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} = \boldsymbol{V}_1\mathbf{a_1} + \boldsymbol{V}_2\mathbf{a_2} + \boldsymbol{V}_3\mathbf{a_3}\,, \qquad (\text{П } 2.13)$$

мы можем представить седенион в следующей компактной форме:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}_0 + \vec{\boldsymbol{V}}\,. \qquad (\text{П } 2.14)$$

Произведение двух седенионов $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$ может быть представлено как

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} = \left(\boldsymbol{A}_0 + \vec{\boldsymbol{A}}\right)\left(\boldsymbol{B}_0 + \vec{\boldsymbol{B}}\right) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0\vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}_0 + \left(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\right) + \left[\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right]. \qquad (\text{П } 2.15)$$

Здесь введены скалярное произведение седенионных векторов, обозначенное символом “$\cdot$” и круглыми скобками:

$$\left(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\right) = -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3\,, \qquad (\text{П } 2.16)$$

и векторное произведение, обозначенное символом “×” и квадратными скобками:

$$\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]=\left(A_2B_3-A_3B_2\right)\mathbf{a_1}+\left(A_3B_1-A_1B_3\right)\mathbf{a_2}+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\mathbf{a_3}\,. \quad (П\ 2.17)$$

Таким образом, седенионное произведение

$$\tilde{F}=\tilde{A}\tilde{B}=F_0+\vec{F} \quad (П\ 2.18)$$

имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
F_0 &= A_0B_0-A_1B_1-A_2B_2-A_3B_3\,,\\
F_1 &= A_1B_0+A_0B_1+\left(A_2B_3-A_3B_2\right),\\
F_2 &= A_2B_0+A_0B_2+\left(A_3B_1-A_1B_3\right),\\
F_3 &= A_3B_0+A_0B_3+\left(A_1B_2-A_2B_1\right).
\end{aligned} \quad (П\ 2.19)$$

Заметим, что в седенионной алгебре квадрат вектора равен

$$\vec{A}^2=\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)=-A_1^2-A_2^2-A_3^2\,, \quad (П\ 2.20)$$

а квадрат модуля вектора равен

$$\left|\vec{A}\right|^2=-\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right)=A_1^2+A_2^2+A_3^2 \quad (П\ 2.21)$$

и является положительно определенной величиной.

П 2.2. Седенионное пространственное вращение и пространственно-временное сопряжение

Преобразование поворота седениона $\tilde{V}$ на угол θ вокруг оси, задаваемой единичным вектором $\vec{n}$, реализуется с помощью седениона

$$\tilde{U}=\cos\left(\theta/2\right)+\vec{n}\sin\left(\theta/2\right) \quad (П\ 2.22)$$

и сопряженного седениона:

$$\tilde{U}^*=\cos\left(\theta/2\right)-\vec{n}\sin\left(\theta/2\right). \quad (П\ 2.23)$$

Для них справедливо соотношение

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\tilde{\boldsymbol{U}}^* = \tilde{\boldsymbol{U}}^*\tilde{\boldsymbol{U}} = 1 . \qquad (\text{П } 2.24)$$

Преобразованный седенион $\tilde{\boldsymbol{V}}'$ записывается как седеонное произведение следующего вида:

$$\tilde{\boldsymbol{V}}' = \tilde{\boldsymbol{U}}^* \tilde{\boldsymbol{V}} \tilde{\boldsymbol{U}} \quad . \qquad (\text{П } 2.25)$$

Таким образом, преобразованный седенион $\tilde{\boldsymbol{V}}'$ равен

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{V}}' &= \left[\cos(\theta/2) - \vec{n}\sin(\theta/2)\right]\left(\boldsymbol{V_0} + \vec{\boldsymbol{V}}\right)\left[\cos(\theta/2) + \vec{n}\sin(\theta/2)\right] \\ &= \boldsymbol{V_0} + \vec{\boldsymbol{V}}\cos\theta - \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{\boldsymbol{V}}\right)(1-\cos\theta) - \left[\vec{n}\times\vec{\boldsymbol{V}}\right]\sin\theta . \qquad (\text{П } 2.26)\end{aligned}$$

Ясно видно, что скалярная часть седениона не преобразуется, в то время как векторная часть $\vec{\boldsymbol{V}}$ поворачивается на угол θ вокруг $\vec{n}$.

Операции временной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{t}}$), пространственной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{r}}$) и пространственно-временной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{tr}}$) связаны с преобразованиями в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и осуществляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\hat{R}_{\mathbf{t}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_2\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_2 = \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} - \mathbf{e}_1\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} + \mathbf{e}_2\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \mathbf{e}_3\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}} , \\ \hat{R}_{\mathbf{r}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_1\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_1 = \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} + \mathbf{e}_1\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \mathbf{e}_2\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \mathbf{e}_3\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}} , \qquad (\text{П } 2.27) \\ \hat{R}_{\mathbf{tr}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_3\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_3 = \overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} - \mathbf{e}_1\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \mathbf{e}_2\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} + \mathbf{e}_3\overline{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}} .\end{aligned}$$

П 2.3. Седенионные преобразования Лоренца

В седенионной алгебре релятивистский четырехмерный вектор события представляется в следующей форме:

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r} . \qquad (\text{П } 2.28)$$

Квадрат этой величины равен

$$\tilde{\boldsymbol{S}}\,\tilde{\boldsymbol{S}} = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad (\text{П } 2.29)$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Преобразования физических величин от одной системы к другой осуществляются с помощью седенионов

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\,\sinh\vartheta\,, \qquad (\text{П } 2.30)$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}^{*} = \cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\,\sinh\vartheta\,, \qquad (\text{П } 2.31)$$

где $\tanh 2\vartheta = \mathrm{v}/c$, v - скорость движения системы вдоль единичного вектора $\vec{m}$. Заметим, что

$$\tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\,\tilde{\boldsymbol{L}}^{*} = 1\,. \qquad (\text{П } 2.32)$$

Например, преобразованный четырехмерный вектор события $\tilde{\boldsymbol{S}}'$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{S}}' = \tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\,\tilde{\boldsymbol{S}}\,\tilde{\boldsymbol{L}} &= \left(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh\vartheta\,\vec{m}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r}\right)\left(\cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh\vartheta\,\vec{m}\right) \\ &= \mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct\,\cosh 2\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\sinh 2\vartheta \\ &+ \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}ct\vec{m}\,\sinh 2\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\vec{m}\left(1-\cosh 2\vartheta\right)\,.\end{aligned} \qquad (\text{П } 2.33)$$

Разделяя в (П 2.33) величины с $\mathbf{e}_{\mathbf{t}}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$, мы получаем хорошо известные преобразования для координат и времени [26]:

$$t' = \frac{t - x\,v/c^2}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\,,\; x' = \frac{x - t\,v}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}}\,,\; y' = y\,,\; z' = z\,, \qquad (\text{П } 2.34)$$

где x - координата вдоль вектора $\vec{m}$.

Преобразования Лоренца для произвольного седениона определяются следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{V}}' = \tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\,\tilde{\boldsymbol{V}}\,\tilde{\boldsymbol{L}}\,. \qquad (\text{П } 2.35)$$

При этом компоненты преобразованного седениона определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}&V' = V\,,\\ &V'_{\mathbf{tr}} = V_{\mathbf{tr}}\,,\\ &V'_{\mathbf{r}} = V_{\mathbf{r}}\cosh 2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\sinh 2\vartheta\,,\\ &V'_{\mathbf{t}} = V_{\mathbf{t}}\cosh 2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\sinh 2\vartheta\,,\\ &\vec{V}' = \vec{V}\cosh 2\vartheta + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}_{\mathbf{rt}}\right]\sinh 2\vartheta\,,\\ &\vec{V}'_{\mathbf{tr}} = \vec{V}_{\mathbf{tr}}\cosh 2\vartheta + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}\right]\sinh 2\vartheta\,,\\ &\vec{V}'_{\mathbf{r}} = \vec{V}_{\mathbf{r}} - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{t}}\,\vec{m}\sinh 2\vartheta\,,\\ &\vec{V}'_{\mathbf{t}} = \vec{V}_{\mathbf{t}} - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{r}}\,\vec{m}\sinh 2\vartheta\,.\end{aligned} \qquad (\text{П } 2.36)$$

П 2.4. Подалгебры пространственно-временных седенионов

Введенный ранее скалярно-векторный седенионный базис позволяет конструировать различные типы гиперкомплексных чисел меньшей размерности. Например, можно ввести пространственно-временные комплексные числа вида

$$Z_{\mathbf{t}} = z_1 + \mathbf{e_t} z_2 , \qquad \text{(П 2.37)}$$

$$Z_{\mathbf{r}} = z_1 + \mathbf{e_r} z_2 , \qquad \text{(П 2.38)}$$

$$Z_{\mathbf{tr}} = z_1 + \mathbf{e_{tr}} z_2 , \qquad \text{(П 2.39)}$$

которые обладают всеми свойствами комплексных чисел, однако по-разному преобразуются при пространственно-временном сопряжении и седенионных преобразованиях Лоренца. Кроме того, можно ввести различные типы кватернионов, которые отличаются своими свойствами по отношению к операциям пространственного и временного сопряжения:

$$\widehat{q} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_0} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \qquad \text{(П 2.40)}$$

$$\widehat{q}_{\mathbf{t}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_t} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \qquad \text{(П 2.41)}$$

$$\widehat{q}_{\mathbf{r}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_r} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \qquad \text{(П 2.42)}$$

$$\widehat{q}_{\mathbf{tr}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_{tr}} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) . \qquad \text{(П 2.43)}$$

Абсолютный кватернион (П 2.40) представляет собой сумму абсолютного скаляра и абсолютного вектора. Он не изменяется под действием операций пространственно-временного сопряжения. Временной кватернион $\widehat{q}_{\mathbf{t}}$, пространственный кватернион $\widehat{q}_{\mathbf{r}}$ и пространственно-временной кватернион $\widehat{q}_{\mathbf{tr}}$ изменяются под действием операций пространственно-временного сопряжения в соответствии с правилами коммутации базисных элементов $\mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_{tr}}$. Например, операция временного сопряжения (см. (27)) кватерниона $\widehat{q}_{\mathbf{t}}$ сводится к преобразованию следующего вида:

$$\hat{R}_{\mathbf{t}} \widehat{q}_{\mathbf{t}} = -\mathbf{e_r} \widehat{q}_{\mathbf{t}} \mathbf{e_r} = q_0 \mathbf{a_0} - \mathbf{e_t} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) . \qquad \text{(П 2.44)}$$

Кроме того, седенионный базис позволяет также конструировать различные типы пространственно-временных восьмикомпонентных октонионов:

$$\breve{G}_{\mathbf{t}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_t}G_{10} + \mathbf{e_t}\left(G_{11}\mathbf{a_1} + G_{12}\mathbf{a_2} + G_{13}\mathbf{a_3}\right), \quad (\text{П } 2.45)$$

$$\breve{G}_{\mathbf{r}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_r}G_{20} + \mathbf{e_r}\left(G_{21}\mathbf{a_1} + G_{22}\mathbf{a_2} + G_{23}\mathbf{a_3}\right), \quad (\text{П } 2.46)$$

$$\breve{G}_{\mathbf{tr}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_{tr}}G_{30} + \mathbf{e_{tr}}\left(G_{31}\mathbf{a_1} + G_{32}\mathbf{a_2} + G_{33}\mathbf{a_3}\right). \quad (\text{П } 2.47)$$

П 2.5. Седенионные уравнения релятивистской квантовой механики

В седенионной алгебре соотношение Эйнштейна для энергии и импульса частицы

$$E^2 - c^2p^2 - m_0^2c^4 = 0 \quad (\text{П } 2.48)$$

может быть представлено в следующей форме:

$$\left(\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + i\mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right)\left(\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + i\mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right) = 0\,. \quad (\text{П } 2.49)$$

Отсюда, заменяя классические энергию E и импульс $\vec{p}$ соответствующими операторами

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}\,, \quad (\text{П } 2.50)$$

получаем седенионное волновое уравнение для релятивистской частицы:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0\,, \quad (\text{П } 2.51)$$

где волновая функция является седенионом

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t,\vec{r}) = \boldsymbol{\psi}_0(t,\vec{r}) + \vec{\boldsymbol{\psi}}(t,\vec{r})\,. \quad (\text{П } 2.52)$$

Соответствующее уравнение для электрически заряженной частицы в электромагнитном поле имеет следующий вид:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{e_t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)$$
$$\times\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{e_t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0. \qquad (\text{П } 2.53)$$

Это уравнение описывает частицу со спином 1/2 [21].

Для специального класса частиц, описывающихся волновым уравнением первого порядка, справедливо следующее седенионное волновое уравнение:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \qquad (\text{П } 2.54)$$

Для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле это уравнение имеет вид

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{e_t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \qquad (\text{П } 2.55)$$

Это уравнение также описывает частицу со спином 1/2 [22].

П 2.6. Седенионное волновое уравнение для массивного поля

Неоднородное волновое уравнения для массивного силового поля имеет следующий вид:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}+\mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{W}}=\tilde{\boldsymbol{J}}\,. \qquad (\text{П } 2.56)$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{W}}$ - потенциал поля, $\tilde{\boldsymbol{J}}$ - источник поля, m_0 - масса кванта поля.

В специальном случае, когда масса кванта поля равна нулю, это уравнение описывает электромагнитное поле в вакууме. Действительно, выбирая потенциал в виде

$$\tilde{\boldsymbol{W}}=\mathbf{e_t}\varphi+\mathbf{e_r}\vec{A} \qquad (\text{П } 2.57)$$

и источник поля

$$\tilde{\boldsymbol{J}}=-\mathbf{e_t}4\pi\rho-\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \qquad (\text{П } 2.58)$$

мы получаем следующее уравнение поля:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_t}\varphi+\mathbf{e_r}\vec{A}\right)=-\mathbf{e_t}4\pi\rho-\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (\Pi\ 2.59)$$

После действия первого оператора в левой части уравнения (П 2.59) мы имеем

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_t}\varphi+\mathbf{e_r}\vec{A}\right)\\&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right].\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.60)$$

Используя седенионное определение полей

$$\begin{aligned}\vec{E}&=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi,\\\vec{H}&=\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.61)$$

и принимая во внимание условие калибровки Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=0\,, \qquad (\Pi\ 2.62)$$

мы можем переписать выражение (П 2.60) в следующем виде:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_t}\varphi+\mathbf{e_r}\vec{A}\right)=-\mathbf{e_{tr}}\vec{E}+\vec{H}\,. \qquad (\Pi\ 2.63)$$

Тогда волновое уравнение (П 2.59) принимает вид

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(-\mathbf{e_{tr}}\vec{E}+\vec{H}\right)=-\mathbf{e_t}4\pi\rho-\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (\Pi\ 2.64)$$

Производя седенионное умножение в левой части уравнения (П 2.64), мы получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mathbf{e_t}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\mathbf{e_t}\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\\&+\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}-\mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\mathbf{e_r}\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\mathbf{e_t}4\pi\rho-\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}.\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.65)$$

Отсюда, разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) = -\mathbf{e}_{\mathbf{t}}4\pi\rho,\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] = \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j},\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] = -\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{П 2.66}
$$

Система (П 2.66) совпадает с системой уравнений Максвелла.

П 2.7. Заключение

Алгебра седенионов во многом эквивалентна алгебре седеонов. В противоположность алгебре седеонов, в которой умножение базисных элементов основано на правилах, предложенных А. Макфарлейном [23], и содержит мнимую единицу, в седенионной алгебре умножение строится на правилах, предложенных В. Гамильтоном [1] для кватернионов. Между двумя этими алгебрами существует простая связь. Обозначим базис седеонов $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{M}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{M}$ (правила Макфарлейна), а базис седенионов $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{H}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{H}$ (правила Гамильтона). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{M} = i\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{H},$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{M} = i\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{H}.$$

Таким образом, использование той или иной алгебры для описания частиц и полей зависит лишь от удобства и личных пристрастий, однако физическая сущность получаемых результатов совершенно не зависит от выбранной алгебры.

Литература

1. W.R.Hamilton, "Lectures on quaternions", Royal Irish Academy, (1853).
2. W.R.Hamilton, "Elements of quaternions", University of Dublin Press. (1866).
3. J.Baez – The octonions, Bulletin of the American Mathematical Society, 39(2), 145-205 (2001).
   Перевод: Д.Баэз – Октонионы, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, 3(1), 120 (2006).
4. K.Imaeda, M.Imaeda – Sedenions: algebra and analysis, Applied Mathematics and Computations, 115, 77-88 (2000).
5. "Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей", под ред. А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича, Москва, Наука, 1978.
6. И.Л.Кантор, А.С.Солодовников – "Гиперкомплексные числа", Москва, Наука, 1973.
7. А.В.Березин, Ю.А.Курочкин, Е.А.Толкачев - "Кватернионы в релятивисткой физике", Минск, Наука и техника, 1989.
8. F.Gürsey and H.C.Tze, "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics", Singapore: World Scientific, 1996.
9. K. Gürlebeck, W. Sprössig – "Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers", John Wiley & Sons, 1997.
10. G.M.Dixon – Division algebras: octonions, quaternions, complex numbers and the algebraic design of physics (Mathematics and its applications), Springer, 2006.
11. D.Smith, J.H.Conway – On quaternions and octonions, Pub. AK Peters, 2003.
12. A.Gsponer, J.P.Hurni – Quaternions in mathematical and physics (1), e-print arXiv:math-ph/0510059v3 (2006).
13. A.Gsponer, J.P.Hurni – Quaternions in mathematical and physics (2), e-print arXiv:math-ph/0511092v3 (2006)
14. W.P.Joyce – Dirac theory in spacetime algebra: I. The generalized bivector Dirac equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, 34, 1991-2005 (2001).

15. C.Cafaro, S.A. Ali – The spacetime algebra approach to massive classical electrodynamics with magnetic monopoles, Advances in Applied Clifford Algebras, 17, 23-36 (2006).

16. V.L.Mironov, S.V.Mironov – Reformulation of relativistic quantum mechanics equations with non-commutative sedeons , Applied Mathematics, 4(10C), 53-60 (2013).

17. V.L.Mironov, S.V.Mironov - Noncommutative sedeons and their application in field theory , ArXiv http://arxiv.org/abs/1111.4035

18. V.L.Mironov, S.V.Mironov – Sedeonic equations of gravitoelectromagnetism, Journal of Modern Physics, 50(10), 917-927 (2014).

    См. также: V.L.Mironov, S.V.Mironov, S.A.Korolev - Sedeonic theory of massless fields, ArXiv http://arxiv.org/abs/1206.5969

19. S.V.Mironov, V.L.Mironov - Sedeonic equations of massive fields, International Journal of Theoretical Physics, **54**(1), 153-168 (2015).

    См. также: S.V.Mironov, V.L.Mironov - Sedeonic theory of massive fields, ViXra http://vixra.org/abs/1311.0005

20. V.L.Mironov, S.V.Mironov – Octonic representation of electromagnetic field equations, Journal of Mathematical Physics, 50, 012901 1-10 (2009).

21. V.L.Mironov, S.V.Mironov – Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics, Journal of Mathematical Physics, 50, 012302 1-13 (2009).

22. V.L.Mironov, S.V.Mironov – Octonic first-order equations of relativistic quantum mechanics, International Journal of Modern Physics A, 24(22), 4157-4167 (2009).

23. A.Macfarlane -"Hyperbolic Quaternions", Proceedings of the Royal Society at Edinburgh, 1899-1900 session, pp. 169–181 (1900).

24. W.Pauli - Zur Quantenmechanik des Magnetischen Elektrons, Zeitschrift für Physik, 43(9-10), 601-623 (1927). doi:10.1007/BF01397326

25. P.A.M. Dirac - The Quantum Theory of the Electron, Proceedings of Royal Society at London. Ser. A., 117 (778), 610-624 (1928). doi:10.1098/rspa.1928.0023

26. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – “Теория поля”, Москва, Наука, 1973.

27. П.Дирак – ”Принципы квантовой механики”, Москва, Наука, 1979.

28. P.A.M. Dirac – Quantised singularities in the electromagnetic field, Proceedings of Royal Society at London. Ser. A., 133, 60-72 (1931). doi:10.1098/rspa.1931.0129

29. P.A.M. Dirac – The theory of magnetic poles, Physical Review, 74, 817 (1948).

30. J.Schwinger – A magnetic model of matter – Science, 165, 757 (1969).

31. J.C.Maxwell - A dynamical theory of the electromagnetic field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 155, 459-512 (1865.)

32. O.Heaviside - A gravitational and electromagnetic analogy, The Electrician, 31, 281-282 (1893).

33. V. Majernik - Field approach to gravitation and its significance in astrophysics, Astrophysics and Space Science, 14, 265-285 (1971).

34. V. Majernik - Quaternionic formulation of the classical fields, Advances in Applied Clifford Algebras, 9(1), 119-130 (1999).

35. S. Demir, M.Tanisli, T.Tolan – Octonic gravitational field equations, International Journal of Modern Physics A, 28(21), 1350112 (2013).

36. S. Ulrych - Gravitoelectromagnetism in a complex Clifford algebra, Physics Letters B, 633, 631-635 (2006).

37. C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, “Gravitation”, (W.H.Freeman and Company, San Francisco), 1973.

38. M.L.Ruggiero, A.Tartaglia - Gravitomagnetic effects, Il Nuovo Cimento B, 117, 743-768 (2002).

39. B.Mashhoon – “Gravitoelectromagnetism: a brief review”, in “The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise”, edited by L.Iorio (NOVA Science, Hauppage, New York) ch. 3, 29-39, 2007.

40. S.Schwebel - Newtonian gravitational field theory, International Journal of Theoretical Physics, 3(4), 315-330 (1970).

41. В.Б.Берестецкий, Е.М.Лифшиц, Л.П.Питаевский – “Квантовая электродинамика”, Москва, Наука, 1980.

42. S.Ulrych - The Poincare mass operator in terms of a hyperbolic algebra, Physics Letters B, 612(1-2), 89 (2005).

43. N.Candemir, M.Tanisli, K.Ozdas and S.Demir - Hyperbolic octonionic Proca-Maxwell equations, Zeitschrift fur Naturforschung A, 63a, 15-18, (2008).

44. S.Ulrych - Considerations on the hyperbolic complex Klein-Gordon equation, Journal of Mathematical Physics, 51(6), 063510 (2010).

45. S.Demir and M.Tanisli - A compact biquaternionic formulation of massive field equations in gravi-electromagnetism, European Physical Journal - Plus, 126, 115 1-12 (2011).

46. R.Penney - Octonions and Dirac equation, American Journal of Physics, 36, 871 (1968).

47. A.J.Davies - Quaternionic Dirac equation, Physical Review D, 41(8), 2628 (1990).

48. S. De Leo and P.Rotelli - Quaternion scalar field, Physical Review D, 45(2), 575 (1992).

49. S. De Leo and K.Abdel-Khalek - Octonionic Dirac equation, Progress of Theoretical Physics, 96, 833 (1996).

50. S.Demir, M.Tanisli - Sedenionic formulation for generalized fields of dyons, International Journal of Theoretical Physics, 51(4), 1239-1253 (2012).

51. L.E.Dickson - On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem", Annals of Mathematics (Second Series), 20(3), 155–171 (1919).

52. V.L. Mironov, S.V. Mironov - Reformulation of relativistic quantum mechanics and field theory equations with space - time sedenions, ViXra http://vixra.org/abs/1402.0157, (2014).

Дополнительная литература

Кватернионы

53. S.L.Adler, “Quaternionic quantum mechanics and quantum fields”, New York: Oxford University Press, 1995.
54. S.L.Adler – Time-dependent perturbation theory for quaternionic quantum mechanics, with application to CP nonconservation in K-meson decays, Physical Review D, 34(6), 1871-1877, (1986).
55. S.L.Adler – Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation, Physical Review D, 37(12), 3654-3662, (1988).

56. A.J.Davies, B.H.J.McKellar – Nonrelativistic quaternionic quantum mechanics in one dimension, Physical Review A, 40(8), 4209-4214, (1989).
57. A.J.Davies – Quaternionic Dirac equation, Physical Review D, 41(8), 2628-2630, (1990).
58. S.De Leo - Quaternionic electroweak theory, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 22(8), 1137, (1996).
59. K.Imaeda – A new formulation of classical electrodynamics, Nuovo cimento, 32(1), 138-162 (1976).
60. M.Tanışlı - Gauge transformation and electromagnetism with biquaternions, Europhysics Letters, 74(4), 569-573 (2006).
61. S.Demir and K.Özdas - Dual quaternionic reformulation of classical electromagnetism, Acta Physica Slovaca, 53(6), 429-436 (2003).
62. S.Demir - Matrix realization of dual quaternionic electromagnetism, Central European Journal of Physics, 5(4), 487-506 (2007).
63. S.Demir, M.Tanişli , N.Candemir - Hyperbolic quaternion formulation of electromagnetism, Advances in Applied Clifford Algebras, 20(3-4), 547-563 (2010).
64. M.Tanişli , M.Emre Kansu, S.Demir - Supersymmetric quantum mechanics and euclidean Dirac operator with complexified quaternions, Modern Physics Letters A, 28(8), 1350026 (2013).
65. S.Ulrych - Higher spin quaternion waves in the Klein-Gordon theory, International Journal of Theoretical Physics, 52(1), 279 (2013).
66. V.V.Kravchenko - Quaternionic reformulation of Maxwell's equations for inhomogeneous media and new solutions, ArXiv: http://arxiv.org/abs/math-ph/0104008
67. V. G. Kravchenko, V. V. Kravchenko - Quaternionic factorization of the Schrödinger operator and its applications to some first order systems of mathematical physics. Journal of Physics A, 36(44), 11285-11297 (2003). (available from arxiv.org)
68. S. M. Grudsky, K. V. Khmelnytskaya, V. V. Kravchenko - On a quaternionic Maxwell equation for the time-dependent electromagnetic field in a chiral medium. Journal of Physics A, 37(16), 4641-4647 (2004). (available from arxiv.org).

Октонионы

69. S.Okubo, “Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics” (Montroll memorial lecture series in mathematical physics, 2) Cambridge University Press, 1995.
70. M.Gogberashvili – Octonionic electrodynamics, Journal of Physics A: Mathematical and General, 39, 7099-7104, (2006).

71. A.Gamba – Maxwell’s equations in octonion form, Nuovo Cimento A, 111(3), 293-302, (1998).
72. T.Tolan, K.Özdas, M.Tanişli– Reformulation of electromagnetism with octonions, Nuovo Cimento B, 121(1), 43-55 (2006).
73. A.A.Bogush, Yu.A.Kurochkin – Cayley-Dickson procedure, relativistic wave equations and supersymmetric oscillators, Acta Applicandae Mathematicae, 50, 121-129 (1998)
74. M.Tanişli, M.Emre Kansu - Octonionic Maxwell’s equations for bi-isotropic media, Journal of Mathematical Physics, 52(5), 053511 (2011).
75. M.Tanişli, M. Emre Kansu, S.Demir - A new approach to Lorentz invariance on electromagnetism with hyperbolic octonions, European Physical Journal-Plus, 127(6), 69, (2012).
76. S.Demir - Hyperbolic octonion formulation of gravitational field equations, International Journal of Theoretical Physics, 52(1), 105-116 (2013).
77. J.Köplinger - Nonassociative quantum theory on octooctonion algebra, Journal of physical Mathematics, 1, S090501 (2009).
78. B.C. Chanyal, P.S. Bisht, O.P.S. Negi - Generalized octonion electrodynamics, International Journal of Theoretical Physics, 49(6), 1333 (2010).
79. V. Dzhunushaliev, Nonassociativity, supersymmetry, and hidden variables, Journal of Mathematical Physics, 49, 042108 (2008).
80. V. Dzhunushaliev - Hidden structures in quantum mechanics, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, 3(1), 33–38 (2009).
81. B.C. Chanyal, P.S. Bisht, O.P.S. Negi - Octonion and conservation laws for dyons, International Journal of Modern Physics A, 28(26), 1350125 1-17 (2013).
82. M.E. Kansu - An analogy between macroscopic and microscopic systems for Maxwell’s equations in higher dimensions. European Physical Journal - Plus, 128, 149 (2013).

Седенионы

83. K.Carmody – Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions, Applied Mathematics and Computation, 28, 47-72 (1988).
84. K.Carmody – Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results, Applied Mathematics and Computation, 84, 27-47 (1997).
85. J.Köplinger – Dirac equation on hyperbolic octonions, Applied Mathematics and Computation, 182, 443-446 (2006).
86. V. Dzhunushaliev - Toy Models of a Nonassociative Quantum Mechanics, Advances in High Energy Physics, Volume 2007, Article ID 12387, 10 pages.

Алгебры Клиффорда

87. B.Jancewicz, “Multivectors and Clifford Algebra in Electrodynamics”, World Scientific, 1988.
88. W.M.Pezzaglia – Clifford algebra derivation of the characteristic hypersurfaces of Maxwell’s equations, e-print arXiv:hep-th/9211062v1 (1992).
89. W.E.Baylis, G.Jones – The Pauli algebra approach to special relativity, Journal of Physics A: Mathematical and General, 22, 1-15, (1989).
90. A.M.Shaarawi – Clifford algebra formulation of an electromagnetic charge-current wave theory, Foundations of physics, 30(11), 1911-1941 (2000).
91. D.Hestenes – Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory, Journal of Mathematical Physics, 16, 556-572 (1975).
92. D.Hestenes – Clifford algebra and the interpretation of quantum mechanics. In: Clifford algebra and their applications in mathematical physics. (Eds. J.S.R.Chisholm, A.K.Commons) Reidel, Dordrecht / Boston, 321-346 (1986).
93. T.Tolan, M.Tanişli, S. Demir – Octonic form of Proca-Maxwell’s equations and relativistic derivation of electromagnetism, International Journal of Theoretical Physics, 52(12), 4488-4506 (2013).
94. S. Demir, M.Tanişli, T.Tolan – Octonic gravitational field equations, International Journal of Modern Physics A, 28(21), 1350112 (2013).

Гравитоэлектромагнетизм

95. P.S. Bisht, G. Karnatak, O.P.S. Negi - Generalized gravi-electromagnetism, International Journal of Theoretical Physics, 49(6), 1344 (2010).

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
603950, Нижний Новгород, ГСП-105, Россия